Darstellung des
Potentials des Ellipsoids
durch Lamé'sche Functionen.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 7. August 1890

VON

Ernst Vorsteher

aus Barmen.

OPPONENTEN:

Edmund Liebheit, Dr. phil.
Hermann Maser.
Wilhelm Schrentzel.

BERLIN

Buchdruckerei Otto Lange, Seydelstr. 27.

Die vorliegende Arbeit setzt sich als erstes Ziel, das Potential des Ellipsoids durch Lamé'sche Funktionen auf dem Wege darzustellen, der von Heine in seinem Handbuch der Kugelfunktionen angedeutet, aber nicht ausgeführt ist. Der Lösung dieser Aufgabe ist der erste Abschnitt gewidmet. Es soll darin zunächst für Heine's Entwicklung der reciproken Entfernung T zweier Punkte nach Lame'schen Produkten die erforderliche nähere Begründung gegeben und alsdann die Entwicklung der Kugelfunktionen nach Lamé'schen Produkten ausführlich behandelt werden, um dabei einige der Resultate, welche sich im 4. Kap. des zweiten Theils des ersten Bandes von Heine's Handbuch finden, richtig zu stellen.

Bei der eben angedeuteten nahen Verwandtschaft der Kugel- und Lamé'schen Funktionen schliesst sich an diesen ersten Abschnitt naturgemäss die Aufgabe, welcher der zweite Abschnitt gewidmet sein wird, nämlich die Vergleichung der gewonnenen Darstellung durch Lamé'sche Funktionen mit der von Heine gegebenen Darstellung durch Kugelfunktionen. Es wird sich dabei ergeben, dass die in der letzteren Darstellung auftretenden Doppelintegrale W, w, U, u, von denen die beiden ersteren bis auf einen irrationalen Faktor ganze Funktionen sind, die beiden letzteren elliptische Integrale erster und zweiter Gattung enthalten, sich als lineare Funktionen resp. der Lamé'schen Funktionen erster und zweiter Art darstellen lassen, und dass also auch umgekehrt die verschiedenen Klassen der Lamé'schen Funktionen erster Art sich als lineare Funktionen der W resp. w, die Lamé'schen Funktionen zweiter Art sich als lineare Funktionen der U resp. u darstellen lassen, und dass die Coefficienten dieser Entwicklungen sich in sehr einfacher Weise aus den bei der Entwicklung der Kugelfunktionen nach Lamé'schen Produkten auftretenden Coefficienten zusammensetzen.

I. Entwicklung des Potentials nach Lamé'schen Produkten.

§ 1. Vorbereitung.

Wir bezeichnen mit Heine die rechtwinkligen Coordinaten des angezogenen Punktes mit x, y, z, die eines beliebigen Punktes mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, setzen

$$R^2 = (x-\mathfrak{a})^2 + (y-\mathfrak{b})^2 + (z-\mathfrak{c})^2; \quad TR = 1.$$

Wir nennen ferner unter den der anziehenden Masse nicht angehörenden Punkten O diejenigen, welche im hohlen Raume liegen, die man also nicht in's Unendliche führen kann, ohne sie durch die Masse selbst zu führen, innere, die anderen äussere, bezeichnen das Körperpotential mit V, das Flächenpotential mit v und hängen den Buchstaben V, v, O den Index μ, α, ι an, je nachdem es sich um inmitten der Masse gelegene, äussere oder innere Punkte handelt.

Wir führen nun die Ivory'schen Coordinaten ein, indem wir setzen $(c > b)$

1)
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, & \mathfrak{a} &= \sigma\cos\eta \\ y &= \sqrt{\rho^2-b^2}\sin\theta\cos\psi, & \mathfrak{b} &= \sqrt{\sigma^2-b^2}\sin\eta\cos\omega \\ z &= \sqrt{\rho^2-c^2}\sin\theta\sin\psi, & \mathfrak{c} &= \sqrt{\sigma^2-c^2}\sin\eta\sin\omega \end{aligned}$$

Das Volumenelement im Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ wird dann in den Coordinaten σ, η, ω ausgedrückt, gleich

2)
$$A\frac{\sin\eta\, d\eta\, d\omega\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-b^2}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}},$$

wo

$$A = (\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)\cos^2\eta + \sigma^2\sin^2\eta\,[\sigma^2 - b^2\sin^2\omega - c^2\cos^2\omega]$$

und es wird demnach das Potential V einer Masse, die durch zwei confocale Ellipsoide mit den Achsen $\rho = r_0$ und $\rho = r_1$ begrenzt wird $(r_0 > r_1)$, wenn wir mit k die Dichtigkeit im Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnen:

3)
$$V = \int k\,A\cdot T\cdot\frac{\sin\eta\, d\eta\, d\omega\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-b^2}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}}$$

wo die Integration nach σ sich von r_1 bis r_0, nach η von 0 bis π, nach ω von 0 bis 2π erstreckt.

Wird die ellipsoidische Fläche, deren halbe Achsen r, $\sqrt{r^2-b^2}$, $\sqrt{r^2-c^2}$ sind, mit Masse von der Dichtigkeit $\varkappa$ belegt, so findet man

4) $$v = \mathfrak{r}\sqrt{\mathfrak{r}^2 - b^2}\,\sqrt{\mathfrak{r}^2 - c^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varkappa}{e}\,T\sin\eta\,d\eta\,d\omega,$$

wo e die Entfernung des Mittelpunktes von der Tangentialebene im Punkte $(\mathfrak{r}, \eta, \omega)$ bezeichnet.

Wir führen nun statt θ und ψ die elliptischen Coordinaten μ und ν vermittelst der Gleichungen ein

5) $$\cos\theta = \frac{\mu\nu}{bc}$$

$$\sin\theta\cos\psi = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$\sin\theta\sin\psi = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

und bezeichnen durch ε, ζ und ξ die folgenden elliptischen Integrale, die auf reellem Wege bis zu den reellen oberen Grenzen genommen werden:

$$\varepsilon = \int_b^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \mu^2}}, \qquad \zeta = \int_0^{\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}}$$

$$\xi = \int_c^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}}$$

Mit μ_1 und ν_1 mögen ferner zwei Grössen bezeichnet werden, die von η und ω ebenso abhängen, wie μ und ν von θ und ψ, und die vorstehenden Integrale mögen, wenn μ, ν, ρ mit μ_1, ν_1, σ vertauscht werden, mit ε_1, ζ_1, ξ_1 bezeichnet werden. Die ganzen Integrale ε und ζ, d. h. bis $\mu = c$ oder $\nu = b$ genommen, mögen ω und $\tilde{\omega}$ heissen. Dann ist

6) $$A = (\sigma^2 - \mu_1^2)(\sigma^2 - \nu_1^2), \qquad \sin\eta\,d\eta\,d\omega = (\mu_1^2 - \nu_1^2)\,d\varepsilon_1\,d\zeta_1$$

Endlich bezeichnen wir nach Lamé's Vorgang die Lamé'schen Funktionen erster Art, d. h. die $2n+1$ ganzen Funktionen von μ, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, welche der Differentialgleichung

7) $$(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)\frac{d^2E(\mu)}{d\mu^2} + \mu(2\mu^2 - b^2 - c^2)\frac{dE(\mu)}{d\mu}$$

$$+ [(b^2 + c^2)\nu_s - n(n+1)\mu^2]E(\mu) = 0$$

genügen, mit $E_s^{(n)}(\mu)$. Sie zerfallen, je nachdem sie ganz in μ, oder noch einen der Faktoren $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{\mu^2 - c^2}$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{\mu^2 - c^2}$, enthalten,

in 4 Klassen $K(\mu)$, $L(\mu)$, $M(\mu)$, $N(\mu)$, denen, wenn σ zur Abkürzung $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ vorstellt, je nachdem n gerade oder ungerade ist, resp. $\sigma+1$, $n-\sigma$, $n-\sigma$, σ Individuen angehören. Dementsprechend wollen wir die Individuen

der Klasse K mit E_0, E_1, ... E_σ,
die der Klasse L mit $E_{\sigma+1}$, $E_{\sigma+2}$ . . . . . E_n,
die der Klasse M mit E_{n+1}, E_{n+2} . . . . . $E_{2n-\sigma}$,
die der Klasse N mit $E_{2n-\sigma+1}$, $E_{2n-\sigma+2}$. E_{2n}

bezeichnen, wobei wir uns noch frei halten, den Buchstaben E durch das der Klasse eigenthümliche Funktionszeichen zu ersetzen. Den willkürlichen Faktor der Funktion $E_s(\mu)$ bestimmen wir so, dass

$$8) \qquad \int_0^{\tilde{\omega}} d\zeta \int_0^{\omega} (\mu^2 - \nu^2) \left(E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu)\right)^2 d\varepsilon = 1$$

wird, und bezeichnen den so bestimmten Coefficienten der höchsten Potenz in $E_s^{(n)}(\mu)$ mit $c_s^{(n)}$. Dann ist $\lim_{\sigma=\infty} \sigma^{-n} E_s^{(n)}(\sigma) = c_s^{(n)}$.

Die Differentialgleichung 7) nimmt noch folgende Formen an:

$$7a) \qquad \frac{d^2 E(\mu)}{d\varepsilon^2} + [n(n+1)\mu^2 - (b^2+c^2) v_s] E(\mu) = 0$$

und

$$\frac{d^2 E(\nu)}{d\zeta^2} - [n(n+1)\nu^2 - (b^2+c^2) v_s] E(\nu) = 0$$

Sie besitzt als zweites partikuläres Integral eine nach absteigenden Potenzen von μ fortschreitende Reihe, welche mit der $-(n+1)^{\text{ten}}$ Potenz beginnt und Lamé'sche Funktion zweiter Art heisst. Wir bezeichnen sie nach Heine mit $F_s^{(n)}(\mu)$. Bestimmen wir den willkürlichen Faktor so, dass $\lim_{\rho=\infty} \rho^{n+1} F_s^{(n)}(\rho) = \frac{1}{c_s^{(n)}}$ wird, so wird (H. I, 385)*)

$$9) \qquad F_s^{(n)}(\rho) = (2n+1) E_s^{(n)}(\rho) \int_\rho^\infty \frac{d\rho \cdot}{\left(E_s^{(n)}(\rho)\right)^2 \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}$$

Um nun die Ausdrücke V und v nach Lamé'schen Produkten $E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu)$ zu entwickeln, haben wir zunächst T nach solchen Produkten zu entwickeln.

*) Wir citiren hier und im Folgenden kurz H. I, 385, statt Heine: Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. I, pg. 385.

§ 2. Entwickelung von T nach Lamé'schen Produkten.

Die Darstellung von T durch Lamè'sche Produkte suchen wir mit Heine (H. II, 171—3) durch Integration der Differentialgleichung

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

zu gewinnen. Transformirt man die Gleichung zunächst in die Coordinaten ρ, μ, ν, so erhält man:

$$10) \qquad (\rho^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} + (\rho^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + (\mu^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0$$

Denkt man sich nun T nach Kugelfunktionen von θ und ψ in die Reihe entwickelt

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}$$

und alsdann $Z^{(n)}$ nach Lamé'schen Produkten entwickelt:

$$Z^{(n)} = \sum_{s=0}^{2n} \Psi_s^{(n)} E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu),$$

wo nun $\Psi_s^{(n)}$ nur noch ρ, σ, μ_1, ν_1 enthält, so findet man, dass

$$11) \qquad \frac{d^2 \Psi_s^{(n)}}{d\xi^2} - [n(n+1)\rho^2 - (b^2 + c^2) v_s]\, \Psi_s^{(n)} = 0$$

sein muss, d. h. $\Psi_s^{(n)}$ genügt als Funktion von ρ der Differentialgleichung der Lamé'schen Funktionen, $\Psi_s^{(n)}$ muss also die Form haben:

$$\Psi_s^{(n)} = a E_s^{(n)}(\rho) + b F_s^{(n)}(\rho)$$

Setzen wir voraus, dass $\sigma < \rho$ sei, so darf $\Psi_s^{(n)}$ E nicht enthalten, weil T und folglich $Z^{(n)}$ und folglich $\Psi_s^{(n)}$ für $\rho = \infty$ verschwinden muss. Man hat also $a = 0$ zu setzen und findet dann, dass $Z^{(n)}$ in Bezug auf ρ, μ, ν die Form hat:

$$12) \qquad Z^{(n)} = \sum_{s=0}^{2n} b_s^{(n)} E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu)\, F_s^{(n)}(\rho)$$

$b_s^{(n)}$ enthält nun noch die Variabeln σ, μ_1, ν_1. Eine einfache Rechnung zeigt, dass T symmetrisch ist in Bezug auf μ und μ_1, ν und ν_1, ρ und σ. Aus den beiden ersten Eigenschaften folgt, dass

$$b_s^{(n)} = E_s^{(n)}(\mu_1)\, E_s^{(n)}(\nu_1)\, \Phi_s^{(n)}$$

wo $\Phi_s^{(n)}$ noch eine Funktion von σ ist. Aus der letzten Eigenschaft folgt, dass T auch der Differentialgleichung 10) genügt, wenn wir in derselben statt ξ ξ_1 setzen, und daraus folgt dann weiter, dass $b_s^{(n)}$ der Diffential-gleichung 11) genügen muss, wenn wir darin statt ρ und ξ resp. σ und ξ_1 setzen. Demnach hat $\Phi_s^{(n)}$ die Form:

$$\Phi_s^{(n)} = g_s^{(n)} E_s^{(n)}(\sigma) + h_s^{(n)} F_s^{(n)}(\sigma)$$

wo $g_s^{(n)}$ und $h_s^{(n)}$ Constanten bedeuten. Wir haben demnach

$$Z^{(n)} = \sum_{s=0}^{2n} E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu)\, E_s^{(n)}(\mu_1)\, E_s^{(n)}(\nu_1)\, F_s^{(n)}(\rho)\, (g_s^{(n)} E_s^{(n)}(\sigma) + h_s^{(n)} F_s^{(n)}(\sigma)).$$

Nun sagt Heine (H. II, 172), dass $h_s^{(n)}$ Null zu setzen ist, weil T für $\sigma = c$ endlich bleiben muss. Dieser Schluss würde aber nur dann gerechtfertigt sein, wenn $F_s^{(n)}(\sigma)$ für den singulären Punkt $\sigma = c$ unendlich würde. Die determinirende Fundamentalgleichung der Differential-gleichung 7) für den singulären Punkt $\mu = c$

$$\lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{2}\lambda = \lambda(\lambda - \frac{1}{2}) = 0$$

zeigt uns aber, dass wir zwei Fundamentalintegrale erhalten, indem wir setzen:

$$u_1 = \chi(\mu), \quad u_2 = (\mu - c)^{\frac{1}{2}} \chi_1(\mu),$$

wo χ und χ_1 nach positiven Potenzen von $\mu - c$ entwickelbar sind und dass also für $\mu = c$ kein Integral der Differentialgleichung 7), also auch nicht $F_s^{(n)}(\mu)$ unendlich wird. Dasselbe Resultat würde man (selbstverständlich) erhalten, wenn man versuchen wollte, das Integral der Differentialgleichung 7) nach aufsteigenden Potenzen von $\mu - c$ zu entwickeln.

Man kann übrigens die Endlichkeit von $F_s^{(n)}(c)$ auch direkt aus dem Integralausdruck 9) beweisen. Ist $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen K oder L, so verschwindet der Nenner unter dem Integral nur für $\rho = c$, da die Wurzeln von $E_s^{(n)}(\rho) = 0$ kleiner als c sind, und auch nur durch das Verschwinden von $\sqrt{\rho - c}$. Das Integral ist also endlich und demnach auch $F_s^{(n)}(c)$ endlich. Ist dagegen $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen M oder N, so erlangt $F_s^{(n)}(\rho)$ für $\rho = c$ die Form $0 . \infty$. Setzen wir

$$E_s^{(n)}(\rho) = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, H_s^{(n)}(\rho)$$

so verschwindet $H_s^{(n)}$ nicht für $\rho = c$, (H. I, 376) und wir erhalten:

$$F_s^{(n)}(\rho) = (2n + 1)\, E_s^{(n)}(\rho) \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}^3 \sqrt{\rho^2 - b^2}\, (H_s^{(n)}(\rho))^2}$$

Indem wir unter dem Integral Zähler und Nenner mit ρ multipliciren und partiell integriren, finden wir:

$$F_s^{(n)}(\rho) = \frac{2n+1}{\rho\sqrt{\rho^2-b^2}\,H_s^{(n)}(\rho)} + (2n+1)\,E_s^{(n)}(\rho)\int_{\rho}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-c^2}}\,d\left(\frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-b^2}\,(H_s^{(n)}(\rho))^2}\right)$$

Das hier vorkommende Integral bleibt für $\rho = c$ endlich, und da $E_s^{(n)}(c) = 0$, so verschwindet das zweite Glied für $\sigma = c$. Da das erste Glied endlich bleibt, so ist also auch in diesem Falle $F_s^{(n)}(c)$ eine endliche und, wie wir hinzufügen, von Null verschiedene Grösse.

Die Heine'sche Behauptung, dass die Constanten $h_s^{(n)}$ verschwinden müssen, ist gleichwohl richtig. Das Verschwinden derselben folgt nämlich aus der Bedingung, dass die Differentialquotienten von T nach jeder Richtung für alle Werthe von σ und μ_1 endlich bleiben müssen. Bezeichnen wir die Richtung einer beliebigen von dem Punkte (σ, η, ω) ausgehenden Linie mit r, so ist $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial r}$, und $\frac{\partial R}{\partial r}$ bezeichnet den Cosinus des Winkels, den die von dem Punkte (ρ, θ, ψ) nach dem Punkte (σ, η, ω) gezogene Linie mit der Richtung r bildet. $\frac{\partial T}{\partial r}$ kann also nur unendlich werden, wenn $R = 0$ wird. Zu unserem Beweise genügen nun die beiden Richtungen, welche von den Normalen, die im Punkte (σ, η, ω) auf den Flächen $\sigma = \text{const.}$ und $\mu_1 = \text{const.}$ senkrecht stehen, gebildet werden. Wir wollen diese beiden Normalen mit resp. ∂n und ∂o bezeichnen. Zugleich wollen wir zeigen, dass das erste Glied des obigen Ausdrucks für $Z^{(n)}$ der Bedingung der Endlichkeit genügt. Es ist $Z^{(n)}$ von der Form:

$$Z^{(n)} = \sum_{s=0}^{2n} G_s^{(n)}\,E_s^{(n)}(\mu_1)\,E_s^{(n)}(\sigma) + H_s^{(n)}\,E_s^{(n)}(\mu_1)\,F_s^{(n)}(\sigma)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial n} = \frac{\sqrt{\sigma^2-b^2}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}}{\sqrt{\sigma^2-\mu_1^2}\,\sqrt{\sigma^2-\nu_1^2}}\,\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial \sigma}$$

also:

$$\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial n} = \sum_{s=0}^{2n} G_s^{(n)}\,\frac{\sqrt{\sigma^2-b^2}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}}{\sqrt{\sigma^2-\mu_1^2}\,\sqrt{\sigma^2-\nu_1^2}}\,E_s^{(n)}(\mu_1)\,\frac{dE_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$$

$$+ H_s^{(n)}\,\frac{\sqrt{\sigma^2-b^2}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}}{\sqrt{\sigma^2-\mu_1^2}\,\sqrt{\sigma^2-\nu_1^2}}\,E_s^{(n)}(\mu_1)\,\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$$

Wir behaupten nun, dass in den Punkten $\sigma = c$, $\mu_1 = c$, d. h. in den Punkten $\sigma = c$, $\omega = 0$, in den Punkten der Ellipse $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2-b^2} = 1$, $z = 0$

der erste Ausdruck stets endlich bleibt, während dies für den zweiten nicht mehr zutrifft. Ist nämlich $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen K oder L, so ist $\frac{dE_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ für $\sigma = c$ eine endliche Grösse und dasselbe gilt selbstverständlich von $E_s^{(n)}(c)$, so dass in diesem Falle der erste Ausdruck jedenfalls endlich bleibt. Ist $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen M oder N, so wird zwar $\frac{dE_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ für $\sigma = c$ unendlich, aber $E_s^{(n)}(c)$ ist dann Null.

$\sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\frac{dE_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ bleibt für $\sigma = c$ endlich, und $\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - \mu_1^2}} E_s^{(n)}(\mu_1) = \frac{\sqrt{\mu_1^2 - c^2}}{\sqrt{\sigma^2 - \mu_1^2}} H_s^{(n)}(\mu_1)$ bleibt für $\sigma = c$, $\mu_1 = c$ ebenfalls endlich, so dass also auch in diesem Falle der erste Ausdruck endlich bleibt.

Um unsere Behauptung für den zweiten Ausdruck zu beweisen, müssen wir näher auf die Natur von $\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ eingehen. Wir erhalten aus 9):

$$\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{-(2n+1)}{E_s^{(n)}(\sigma)\sqrt{\sigma^2 - b^2}\sqrt{\sigma^2 - c^2}} + (2n+1)\frac{dE_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}\int_\sigma^\infty \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\sqrt{\sigma^2 - c^2}\left(E_s^{(n)}(\sigma)\right)^2}$$

Ist nun $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen K oder L, so verschwindet $E_s^{(n)}(\sigma)$ nicht für $\sigma = c$, und $\frac{dE_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ wird nicht unendlich. Das zweite Glied bleibt also für $\sigma = c$ endlich; das erste wird unendlich. Demnach wird $\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ für $\sigma = c$ unendlich, aber

$$\left(\sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}\right)_{\sigma=c} = -\frac{2n+1}{E_s^{(n)}(c)\sqrt{c^2 - b^2}}$$

ist eine endliche und von Null verschiedene Grösse.

Ist aber E eine der Funktionen M oder N, so erhalten wir, indem wir wieder partiell integriren:

$$\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{2n+1}{\sigma\sqrt{\sigma^2 - b^2}\left(H_s^{(n)}(\sigma)\right)^2}\frac{dH_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$$

$$+ \frac{2n+1}{\sqrt{\sigma^2 - c^2}}\left((\sigma^2 - c^2)\frac{dH_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma} + \sigma H_s^{(n)}(\sigma)\right)\int_\sigma^\infty \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - c^2}}\,d\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma^2 - b^2}\left(H_s^{(n)}(\sigma)\right)^2}\right)$$

Für $\sigma = c$ bleibt das erste Glied endlich, das zweite wird wegen des ersten Faktors unendlich. Demnach wird auch in diesem Falle $\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ für $\sigma = c$ unendlich, aber auch wieder so, dass $\sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ endlich bleibt.

Demnach wird in dem zweiten Theile von $Z^{(n)}$, wenn $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen K oder L ist, der mit $H_s^{(n)}$ multiplicirte Ausdruck für $\mu_1 = c$, $\sigma = c$ unendlich gross, da $\sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ für $\sigma = c$ endlich und von Null verschieden ist, $\frac{E_s^{(n)}(\mu_1)}{\sqrt{\sigma^2 - \mu_1^2}}$ aber für $\mu_1 = c$, $\sigma = c$ unendlich wird. Wenn also $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen K oder L ist, so muss $H_s^{(n)}$ Null sein, wenn $\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial n}$ endlich bleiben soll.

Ist dagegen $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen M oder N, so bleibt auch dieser zweite Theil endlich, da $\sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\frac{dF_s^{(n)}(\sigma)}{d\sigma}$ endlich bleibt und ebenso $\frac{E_s^{(n)}(\mu_1)}{\sqrt{\sigma^2 - \mu_1^2}}$, wie bereits oben gezeigt wurde. Um zu beweisen, dass auch in diesem Falle $H_s^{(n)} = 0$ sein muss, haben wir $\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial o}$ zu bilden. Es ist

$$\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial o} = \frac{\sqrt{\mu_1^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \mu_1^2}}{\sqrt{\sigma^2 - \mu_1^2}\,\sqrt{\mu_1^2 - \nu_1^2}}\,\frac{\partial Z^{(n)}}{\partial \mu_1}$$

$$= \sum_{s=0}^{2n} G_s^{(n)}\,\frac{\sqrt{\mu_1^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \mu_1^2}}{\sqrt{\sigma^2 - \mu_1^2}\,\sqrt{\mu_1^2 - \nu_1^2}}\,E_s^{(n)}(\sigma)\,\frac{dE_s^{(n)}(\mu_1)}{d\mu_1}$$

$$+ H_s^{(n)}\,\frac{\sqrt{\mu_1^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \mu_1^2}}{\sqrt{\sigma^2 - \mu_1^2}\,\sqrt{\mu_1^2 - \nu_1}}\,F_s^{(n)}(\sigma)\,\frac{dE_s^{(n)}(\mu_1)}{d\mu_1}$$

Der Nachweis, dass der erste Theil dieses Ausdrucks stets endlich bleibt, wäre gerade so zu führen wie vorher, da in ihm nur σ und μ_1 mit einander vertauscht sind. Was den zweiten Theil anlangt, so bleibt derselbe, wenn $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen K oder L ist, ebenfalls endlich. Ist dagegen $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen M oder N, so ist

$$\frac{dE_s^{(n)}(\mu_1)}{d\mu_1} = \sqrt{\mu_1^2 - c^2}\,\frac{dH_s^{(n)}(\mu_1)}{d\mu_1} + \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 - c^2}}\,H_s^{(n)}(\mu_1)$$

also $\sqrt{c^2-\mu_1^2}\,\frac{dE_s^{(n)}(\mu_1)}{d\mu_1}$ für $\mu_1 = c$ endlich und von Null verschieden, während $\frac{F_s^{(n)}(\sigma)}{\sqrt{\sigma^2-\mu_1^2}}$ für $\sigma = c$, $\mu_1 = c$ unendlich wird, da $F_s^{(n)}(c)$ nicht Null ist. Wenn also $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen M oder N ist, so muss $H_s^{(n)}$ gleich Null sein, damit $\frac{\partial Z^n}{\partial o}$ endlich bleibe.

Hiermit ist der Beweis geliefert, dass sämmtliche $H_s^{(n)}$ gleich Null sein müssen, also sämmtliche Constanten $h_s^{(n)}$ gleich Null zu setzen sind, und wir haben also

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}$$

13) $$Z^{(n)} = \sum_{s=0}^{2n} g_s^{(n)}\, E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\mu_1)\, E_s^{(n)}(\nu)\, E_s^{(n)}(\nu_1)\, E_s^{(n)}(\sigma)\, F_s^{(n)}(\rho)$$

Die $g_s^{(n)}$ bestimmen sich nun durch Specialisirung. Wir lassen ρ und σ gleichzeitig unendlich werden, jedoch so, dass $\frac{\sigma}{\rho} = r$, wo $r < 1$, bleibt. Dann wird

$$\rho T = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\gamma + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P^n(\cos\gamma),$$

wo

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\eta + \sin\theta\sin\eta\cos(\psi-\omega),$$

und

$$\rho\, E_s^{(n)}(\sigma)\, F_s^{(n)}(\rho) = \sigma^{-n} E_s^{(n)}(\sigma)\rho^{n+1} F_s^{(n)}(\rho)\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^n$$

$$= r^n,$$

so dass also:

$$P^n(\cos\gamma) = \sum_{s=0}^{2n} g_s^{(n)}\, E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu)\, E_s^{(n)}(\mu_1)\, E_s^{(n)}(\nu_1)$$

Andererseits ist aber bekannt (cf. H. I. 432), dass

$$P^n(\cos\gamma) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=0}^{2n} E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu)\, E_s^{(n)}(\mu_1)\, E_s^{(n)}(\nu_1),$$

wenn die constanten Faktoren der Funktionen E gemäss Gleichung 8) bestimmt werden. Unter dieser Voraussetzung ist also

$$g_s^{(n)} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

und

14) $$T = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2n+1} \sum_{s=0}^{2n} E_s^{(n)}(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu)\, E_s^{(n)}(\mu_1)\, E_s^{(n)}(\nu_1)\, E_s^{(n)}(\sigma)\, F_s^{(n)}(\rho).$$

wie Heine zum Schlusse richtig angiebt.

§ 3. Entwicklung von kA und $\frac{\varkappa}{e}$ nach Lamè'schen Produkten.

Ehe wir nun in den Ausdrücken 3) und 4) zur Ausführung der Integration schreiten können, haben wir noch die Faktoren kA resp. $\frac{\varkappa}{e}$ ebenfalls nach Lamé'schen Produkten zu entwickeln. Haben wir kA bereits nach Kugelfunktionen von η und ω entwickelt:

$$15) \qquad kA = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{\mu=0}^{n}{}' \left(\alpha_\mu^{(n)} C_\mu^{(n)}(\eta, \omega) + \mathfrak{a}_\mu^{(n)} S_\mu^{(n)}(\eta, \omega)\right),$$

so erhalten wir hieraus sofort die Entwicklung nach Lamé'schen Produkten, indem wir die bekannten Entwicklungen der Kugelfunktionen $C_\mu^{(n)}$ und $S_\mu^{(n)}$ nach solchen Produkten benutzen. Im Folgenden sollen die Indices π, p stets die geraden, ι, j stets die ungeraden Zahlen aus der Zahlenreihe $0, 1, 2 \ldots n$ bezeichnen. Dann bestehen die Gleichungen (cf. H. I. 376):

$$I. \qquad C_\pi(\theta, \psi) = \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\pi)} K_s(\mu) K_s(\nu)$$

$$C_\iota(\theta, \psi) = \sum_{s=\sigma+1}^{n} g_s^{(\iota)} L_s(\mu) L_s(\nu)$$

$$S_\iota(\theta, \psi) = \sum_{s=n+1}^{2n-\sigma} g_s^{(\iota)} M_s(\mu) M_s(\nu)$$

$$S_\pi(\theta, \psi) = \sum_{s=2n-\sigma+1}^{2n} g_s^{(\pi)} N_s(\mu) N_s(\nu)$$

Setzen wir demnach:

$$\sum_{\pi}{}' \alpha_\pi^{(n)} g_s^{(\pi)} = b_s^{(n)}, \; s = 0, 1 \ldots \sigma$$

$$\sum_{\iota} \alpha_\iota^{(n)} g_s^{(\iota)} = b_s^{(n)}, \; s = \sigma+1, \sigma+2, \ldots n$$

$$16) \qquad \sum_{\iota} \mathfrak{a}_\iota^{(n)} g_s^{(\iota)} = b_s^{(n)}, \; s = n+1, \ldots 2n-\sigma$$

$$\sum_{\pi} \mathfrak{a}_\pi^{(n)} g_s^{(\pi)} = b_s^{(n)}, \; s = 2n-\sigma+1, \ldots 2n,$$

so erhalten wir

$$15a) \qquad kA = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{s=0}^{2n} b_s^{(n)} E_s^{(n)}(\mu_1) E_s^{(n)}(\nu_1)$$

Die $b_s^{(n)}$ sind, wie die α und $\mathfrak{a}$ Funktionen von σ allein.

Wollte man kA direkt, ohne es erst nach Kugelfunktionen zu entwickeln, nach Lamé'schen Produkten entwickeln, so hätte man nach dem von Lamé angegebenen und von Heine in § 98 des ersten Bandes reproducirten Verfahren kA zunächst in die acht Theile zu zerlegen, die den verschiedenen $E^{(n)}$ (d. h. den vier Klassen mit geradem n und den vier Klassen mit ungeradem n) entsprechen. Ist $F(\mu_1, \nu_1)$ einer dieser Theile, so bestimmen sich in

$$F(\mu_1 \nu_1) = \sum_n \sum_s k_s^{(n)} E_s^{(n)}(\mu_1) E_s^{(n)}(\nu_1),$$

wo die Summation nach n nun entweder nur über alle geraden oder über alle ungeraden Zahlen, die nach s nur über eine bestimmte Klasse sich erstreckt, die $k_s^{(n)}$ vermittelst der Gleichung

$$k_s^{(n)} = \int_0^{\tilde{\omega}} d\zeta \int_0^{\omega} F(\mu, \nu)\, E_s^n(\mu)\, E_s^{(n)}(\nu)\, (\mu^2 - \nu^2)\, d\varepsilon.$$

Genau in derselben Weise können wir nun auch $\frac{\varkappa}{e}$ entwickeln. Ist, nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$17) \qquad \frac{\varkappa}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{\mu=0}^{n}{}' \left(\alpha_\mu^{(n)} C_\mu^{(n)}(\eta, \omega) + \mathfrak{a}_\mu^{(n)} S_\mu^{(n)}(\eta, \omega)\right)$$

so ist

$$17a) \qquad \frac{\varkappa}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{s=0}^{2n}{}' b_s^{(n)} E_s^{(n)}(\mu_1) E_s^{(n)}(\nu_1)$$

wo sich die $b_s^{(n)}$ vermittelst der g aus den α und $\mathfrak{a}$ gemäss den Gleichungen 16) zusammensetzen.

Da bei der Bestimmung der Coefficienten g im vierten Kapitel des zweiten Theils des ersten Bandes von Heine's Handbuch Irrthümer vorkommen, und da nachher für den speciellen Fall des homogenen Ellipsoids ($k = 1$) die $b_s^{(n)}$ ermittelt werden müssen, so sind zunächst die richtigen Bestimmungen der Coefficienten g abzuleiten.

§ 4. Die Entwicklung der Kugelfunktionen C_ν^μ und S_ν^μ nach Lamé'schen Produkten.

In dem erwähnten Kapitel leitet Heine zunächst aus den allgemeinen Sätzen über die orthogonale Substitution den folgenden Satz ab:

Soll die quadratische Form:

$$V = a_0 x_0^2 - 2b_1 x_0 x_1 + a_1 x_1^2 - 2b_2 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 - \ldots .$$
$$\ldots . - 2b_n x_{n-1} x_n + a_n x_n^2$$

welche nach einem Vorschlage des Herrn Kronecker eine Jacobi'sche Form genannt wird, durch eine orthogonale Substitution

$$x_0 = c_{00}\, y_0 + c_{01}\, y_1 + \ldots + c_{0n}\, y_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = c_{n0}\, y_0 + c_{n1}\, y_1 + \ldots + c_{nn}\, y_n$$

in die Form:

$$V = z_0\, y_0^2 + z_1\, y_1^2 + \ldots + z_n\, y_n^2$$

verwandelt werden, so bestimmen sich die Coefficienten $c_{0\iota}\, c_{1\iota} \ldots c_{n\iota}$ durch das Gleichungssystem

A)
$$\begin{aligned}
0 &= (a_0 - z_\iota)\, c_{0\iota} - b_1\, c_{1\iota} \\
0 &= -\, b_1\, c_{0\iota} + (a_1 - z_\iota)\, c_{1\iota} - b_2\, c_{2\iota} \\
0 &= -\, b_2\, c_{2\iota} + (a_2 - z_\iota)\, c_{2\iota} - b_3\, c_{3\iota} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= -\, b_{n-1}\, c_{n-2,\iota} + (a_{n-1} - z_\iota)\, c_{n-1,\iota} - b_n\, c_{n\iota} \\
0 &= -\, b_n\, c_{n-1,\iota} + (a_n - z_\iota)\, c_{n\iota}
\end{aligned}$$

in Verbindung mit

$$c_{0\iota}^2 + c_{1\iota}^2 + \ldots + c_{n\iota}^2 = 1$$

z_ι ist dabei so bestimmt, dass die Determinante des Gleichungssystems Null wird.

Man kann der Lösung dieses Gleichungssystems folgende Form geben*):

---

*) In dem Monatsberichte der Berliner Akademie vom Februar 1878 hat Herr Kronecker die Aufgabe gelöst, eine beliebige quadratische Form durch eine orthogonale Substitution in eine Jacobi'sche Form zu transformiren. Das dort angegebene Verfahren ist zwar, wenn es sich um die Transformation eines Aggregats von Quadraten handelt, nicht unmittelbar anwendbar, sondern erst, nachdem man das Aggregat von Quadraten durch eine orthogonale Substitution umgewandelt hat. Aber die Formel, welche a. a. O. Herrn Kronecker zum Ausgangspunkte für das bezeichnete Verfahren dient, enthält bereits die vollständige Lösung des Problems der orthogonalen Transformation eines Aggregats von Quadraten in eine Jacobi'sche Form, und zwar in folgender Weise:

Sollen gleichzeitig die quadratischen Formen

$$\Sigma\, W_h^2 \text{ und } \Sigma\, P_h\, W_h^2 \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

resp. in

$$\sum_{k=1}^{n} g'_k\, v_k^2 \text{ und } \sum_{k=1}^{n} g_k^\circ\, v_k^2 + 2 \sum_{h=1}^{n-1} v_h\, v_{h+1}$$

übergeführt werden, so bilde man:

$$f(x) = (x - P_1)(x - P_2) \ldots (x - P_n)$$

$$f_1(x) = \sum_{h=1}^{n} c_h^2\, \frac{f(x)}{x - P_h}$$

Bezeichnet man durch $\mathfrak{N}_1 = a_0 - z$, $\mathfrak{N}_2$, ... $\mathfrak{N}_{n+1}$ die Näherungsnenner des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a_0 - z - \cfrac{b_1^2}{a_1 - z - \cfrac{b_2^2}{a_2 - z - \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot - \cfrac{b_n^2}{a_n - z}}}},$$

---

wo die c_h n beliebige Grössen sind, und entwickle $\frac{f_1}{f}$ in einen Kettenbruch

$$\frac{f_1}{f} = \cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{g_2 - \cdot\cdot\cdot - \cfrac{1}{g_n}}},$$

setze

$$g_k = g_k' x - g_k^\circ,$$

und bestimme die Restfunktionen $f_2, f_3 \ldots$ durch die Gleichungen:

$$f - g_1 f_1 + f_2 = 0, \quad f_1 - g_2 f_2 + f_3 = 0, \ldots\ldots f_{n-1} - g_n f_n = 0.$$

Alsdann werden die verlangten Transformationen durch die Substitution geleistet:

$$W_h = \frac{c_h}{f_1(P_h)} \sum_{k=1}^{n} g_k' f_k(P_h)\, v_k$$

Demnach geht

$$\sum_{h=1}^{n} P_h W_h^2$$

durch die orthogonale Substitution

$$W_h = \sum_{k=1}^{n} q_{hk} w_k, \qquad q_{hk} = c_h \sqrt{g_k'}\, \frac{f_k(P_h)}{f_1(P_h)}$$

über in die Jacobi'sche Form

$$\sum_{k=1}^{n} a_k w_k^2 - 2 \sum_{h=1}^{n-1} b_h w_h w_{h+1}$$

wo

$$a_k = \frac{g_k^\circ}{g_k'}, \qquad b_h = -\frac{1}{\sqrt{g_h' g_{h+1}'}}$$

Die Substitutionscoefficienten enthalten nur die $n-1$ Verhältnisse der c, welche unbestimmt bleiben. Soll dagegen die gegebene Jacobi'sche Form in eine Summe von Quadraten transformirt werden, so werden die $n-1$ Verhältnisse der c und damit die Substitutionscoefficienten vollständig bestimmt. Es hat keine Schwierigkeit, dieser Umkehrung des Satzes genau die oben im Texte angegebene Form zu geben, wenn man bedenkt, dass $\frac{f_k(P_h)}{f_1(P_h)} = \psi_k(P_h)$, falls ψ_1, ψ_2, ... die Näherungsnenner des obigen Kettenbruchs in der Art bezeichnen, dass $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = g_1$ etc.

so sind $z_0\, z_1 \ldots . z_n$ die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{N}_{n+1}(z) = 0$, und die Coefficienten der Substitution werden durch die Gleichungen bestimmt:

$$c_{\varkappa\iota} = \frac{\gamma_{\varkappa\iota}}{\sqrt{\gamma_{0\iota}^2 + \gamma_{1\iota}^2 + \cdots \gamma_{n\iota}^2}}, \quad \gamma_{\varkappa\iota} = \frac{\mathfrak{N}_\varkappa(z_\iota)}{b_1\, b_2 \ldots b_\varkappa}, \quad \gamma_{0\iota} = 1$$

Diesen Satz wendet Heine an, um die g zu bestimmen. Aus den Gleichungen I. folgt:

II.

$$K_s(\mu)\, K_s(\nu) = \sum_\pi h_\pi^{(s)}\, C_\pi(\theta, \psi)$$

$$L_s(\mu)\, L_s(\nu) = \sum_\iota h_\iota^{(s)}\, C_\iota(\theta, \psi)$$

$$M_s(\mu)\, M_s(\nu) = \sum_\iota h_\iota^{(s)}\, S_\iota(\theta, \psi)$$

$$N_s(\mu)\, N_s(\nu) = \sum_\pi h_\pi^{(s)}\, S_\pi(\theta, \psi)$$

Vermittelst einer Umformung dieses Gleichungssystems und einer Transformation der Differentialgleichung 7) leitet nun Heine Recursionsformeln für die h ab. Wir beschränken uns darauf, dieselben anzugeben, indem wir nur noch bemerken, dass in jener transformirten Differentialgleichung (H. I. 421) im zweiten Gliede sin 2χ statt cos 2χ zu schreiben ist. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} = \varkappa = \frac{1}{\lambda},$$

so gilt für die h der beiden ersten Gleichungen des Schema II. die von Heine (H. I. 422) angegebene Gleichung

(a) . . . $(n+m+1)(n+m+2)\lambda h_{m+2} + 2[n(n+1) - m^2 - 2v]\, h_m$
$+ (n-m+1)(n-m+2)\lambda h_{m-2} = 0.$

Aber ich füge die Bemerkung hinzu, dass diese Gleichung nur gilt, wenn $m > 2$, oder $m = 0$, dass sie für $m = 1$ resp. $m = 2$, je nachdem es sich also um die L oder K handelt, zu ersetzen ist durch

(b) . . . $(n+2)(n+3)\lambda h_3 + [2n(n+1) - 4v - 2 + \lambda n(n+1)]\, h_1 = 0.$

(c) . . $(n+3)(n+4)\lambda h_4 + 2[n(n+1) - 2v - 4]\, h_2 + 2n(n-1)\lambda h_0 = 0$

Zur Bestimmung von v dient die Forderung, dass $h_m = 0$, sobald $m > n$.

Für die Coefficienten h der beiden letzten Gleichungen des Schema II besteht im Allgemeinen dieselbe Gleichung (a); nur für $m = 1$ resp. $m = 2$, je nachdem es sich also um die M oder N handelt, ist sie mit

$$(b') \ldots (n+2)(n+3)\lambda h_3 + [2n(n+1) - 4\nu - 2 - \lambda n(n+1)]\, h_1 = 0$$

$$(c') \ldots \quad (n+3)(n+4)\lambda h_4 + 2[n(n+1) - 2\nu - 4]\, h_2 = 0$$

zu vertauschen. Auch hier ist $h_m = 0$ zu setzen, sobald $m > n$ ist.

Gelingt es uns, diese Gleichungssysteme für die h auf eine dem System A ähnliche Form zu bringen, so können wir auch die Lösung in ähnlicher Weise aussprechen, wie es dort geschah. Dies gelingt nun dadurch, dass wir auf die Gleichungen des Schema I zurückgehen.

Multipliciren wir die Gleichung:

$$C_m(\theta, \psi) = \sum_s g_s^{(m)} E_s(\mu)\, E_s(\nu)$$

mit der Gleichung

$$C_{m'}(\theta, \psi) = \sum_s g_s^{(m')} E_s(\mu)\, E_s(\nu),$$

wo m und m' zwei gleichartige Zahlen bedeuten, und also die Summation nach s in beiden Gleichungen sich über dieselbe Klasse, sei es die der K oder die der L, erstreckt, und multipliciren wir dieses Produkt mit

$$\sin\theta\, d\theta\, d\psi = (\mu^2 - \nu^2)\, d\varepsilon\, d\zeta$$

und integriren nach θ und ψ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ also nach ε und ζ von 0 bis ω oder $\tilde{\omega}$, so wird die linke Seite nur dann Null, wenn m und m' verschieden sind, aber gleich

$$\frac{(-1)^m \pi}{2(2n+1)\, a_m^{(n)}}, \text{ wo } a_m^{(n)} = \frac{2[1.3.5..(2n-1)]^2}{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}$$

wenn $m = m'$ ist. Ist $m = m' = 0$, so ist das Doppelte dieses Ausdrucks zu nehmen, resp. statt $a_0^{(n)}\ \frac{1}{2}\ a_0^{(n)}$ zu setzen. Die rechte Seite verwandelt sich in

$$\sum_s g_s^{(m)}\, g_s^{(m')},$$

wenn wir den willkürlichen multiplicirenden constanten Faktor von $E_s^{(n)}$ gemäss der Gleichung 8) bestimmen. Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir zwei gleichartige S mit einander multipliciren. Demnach ist:

$$\sum_s g_s^{(m)}\, g_s^{(m')} = 0, \quad m \gtrless m'$$

$$\sum_s \left(g_s^{(m)}\right)^2 = \frac{(-1)^m \pi}{2(2n+1)\, a_m^{(n)}}, \quad m > 0$$

$$= \frac{\pi}{(2n+1)\, a_0^{(n)}}, \quad m = 0.$$

Die g verhalten sich also zu einander wie die Coefficienten einer orthogonalen Substitution. Setzen wir:

B) $$g_s^{(n)} = \mathfrak{g}_s^{(n)} \sqrt{\frac{(-1)^n \pi}{2(2n+1)\, a_m^{(n)}}}$$

mit der Massgabe, dass wir für $m = 0$ rechter Hand $\frac{1}{2} a_0^{(n)}$ statt $a_0^{(n)}$ schreiben, so sind die $\mathfrak{g}$ Coefficienten einer orthogonalen Substitution. Unter Einführung dieser $\mathfrak{g}$ wird z. B. die erste Gleichung des Schema I:

α) $$\sqrt{2\frac{2n+1}{\pi}\, b_\pi^{(n)}}\, C_\pi^{(n)}[\mu, \nu] = \sum_{s=0}^{\sigma} \mathfrak{g}_s^{(\pi)} K_s^{(n)}(\mu)\, K_s^{(n)}(\nu),$$

wo

$$b_m^{(n)} = (-1)^m 2 \frac{[1 \cdot 3 \ldots (2n-1)]^2}{\Pi(n+m)\, \Pi(n-m)} = (-1)^m a_m^{(n)}$$

gesetzt ist, für $m = 0$ die Hälfte genommen, $b_0^{(n)} = \frac{1}{2} a_0^{(n)}$.

Löst man die Gleichungen α) nach den Produkten $K(\mu) K(\nu)$ auf, so findet man, da die $\mathfrak{g}$ Coefficienten einer orthogonalen Substitution sind:

α') $$K_s(\mu) K_s(\nu) = \sum_{\pi=0}^{2\sigma} \sqrt{2\frac{2n+1}{\pi}\, b_\pi^{(n)}}\, \mathfrak{g}_s^{(\pi)} C_\pi^{(n)}[\mu, \nu],$$

und indem man ebenso mit den übrigen Gleichungen des Schema I verfährt und die entstehenden Gleichungen mit denen des Schema II vergleicht, erhält man:

C) $$h_m^{(s)} = \mathfrak{g}_s^{(m)} \sqrt{(-1)^m 2 \frac{2n+1}{\pi}\, a_m^{(n)}},$$

wo wieder für $m = 0$ $\frac{1}{2} a_0^{(n)}$ an Stelle von $a_0^{(n)}$ zu setzen ist.

Handelt es sich um die $h_\pi^{(s)}$ der ersten Gleichung des Schema II, so genügen dieselben den Recursionsformeln (a) und (c). Drückt man in ihnen die h, der letzten Gleichung entsprechend, durch die $\mathfrak{g}$ aus, so erhält man, indem man noch zur Abkürzung setzt:

$4\varepsilon_m = (n-m)(n+m+1)$, wenn $m > 0$, $4\varepsilon_0 = 2n(n+1)$,

die Gleichungen:

$$\lambda\, \mathfrak{g}_s^{(2)} \sqrt{\varepsilon_0\, \varepsilon_1} + (\varepsilon_0 - v_s)\, \mathfrak{g}_s^{(0)} = 0$$

$$\lambda\, \mathfrak{g}_s^{(\pi+2)} \sqrt{\varepsilon_\pi\, \varepsilon_{\pi+1}} + (\varepsilon_{\pi-1} + \varepsilon_\pi - v_s)\, \mathfrak{g}_s^{(\pi)} + \lambda\, \mathfrak{g}_s^{(\pi-2)} \sqrt{\varepsilon_{\pi-2}\, \varepsilon_{\pi-1}} = 0$$

Die letzte Gleichung gilt in der That in Folge der abweichenden Definition von ε_3 auch für den Fall $\pi - 2$, d. h. sie entspricht auch der aus Gleichung (c) sich ergebenden Recursionsformel. Dieses Gleichungssystem

hat genau die Form des Systems A) und wir können also die Sätze, welche wir über die c gefunden haben, auf die $\mathfrak{g}$ übertragen. Dieselben lauten dann:

Die Coefficienten $\mathfrak{g}_s^{(\pi)}$ in (α) und (α') sind die Coefficienten in der $s$ten Vertikalreihe der orthogonalen Substitution, durch welche die Form

$$\varepsilon_0 x_0^2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1}\, x_0 x_1 + (\varepsilon_1+\varepsilon_2) x_1^2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\, x_1 x_2 + \ldots$$
$$+ 2\lambda\sqrt{\varepsilon_{2m-2}\varepsilon_{2m-1}}\, x_{m-1} x_m + (\varepsilon_{2m-1}+\varepsilon_{2m}) x_m^2 + \ldots + (\varepsilon_{2\sigma-1}+\varepsilon_{2\sigma}) x_\sigma^2$$

in die Form

$$v_0 y_0^2 + v_1 y_1^2 + \ldots + v_\sigma y_\sigma^2$$

transformirt wird.

Die Coefficienten der sämmtlichen Vertikalreihen ergeben sich aus dem Kettenbruch:

$$\text{D)}\qquad \cfrac{1}{\varepsilon_0 - v - \cfrac{\lambda^2\varepsilon_0\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2 - v - \cfrac{\lambda^2\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_3+\varepsilon_4 - v - \ddots - \cfrac{\lambda^2\varepsilon_{2\sigma-2}\varepsilon_{2\sigma-1}}{\varepsilon_{2\sigma-1}+\varepsilon_{2\sigma} - v}}}}$$

Es findet nämlich die Proportion statt:

$$\mathfrak{g}_s^{(0)} : \mathfrak{g}_s^{(2)} : \ldots : \mathfrak{g}_s^{(2\sigma)} = 1 : \frac{-\varkappa\,\mathfrak{N}_1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1}} : \frac{(-\varkappa)^2\,\mathfrak{N}_2}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}} : \ldots \frac{(-\varkappa)^\sigma\,\mathfrak{N}_\sigma}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{2\sigma-1}}}$$

wenn $\mathfrak{N}$ die Näherungsnenner des Kettenbruchs in der Art bezeichnet, dass $\varepsilon_0 - v = \mathfrak{N}_1$ wird, und man für v die $s$te Wurzel der Gleichung $\mathfrak{N}_{\sigma+1} = 0$ setzt.

Für die Coefficienten g resp. $\mathfrak{g}$ in den Entwicklungen von S_π, C_t, S_t modificiren sich diese Sätze, entsprechend den veränderten Gleichungssystemen für die h. Wir begnügen uns, die Resultate auszusprechen:

Die Coefficienten der N erhält man aus der Proportion:

$$\mathfrak{g}_s^{(2)} : \mathfrak{g}_s^{(4)} : \ldots \mathfrak{g}_s^{(2\sigma)} = \mathfrak{Z}_1 : \frac{-\varkappa\,\mathfrak{Z}_2}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} : \frac{(-\varkappa)^2\,\mathfrak{Z}_3}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5}} : \ldots \frac{(-\varkappa)^{\sigma-1}\,\mathfrak{Z}_\sigma}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_{2\sigma-1}}}$$

wenn die $\mathfrak{Z}$ die Näherungszähler des Kettenbruchs D) in der Art vorstellen, dass $\mathfrak{Z}_1$ gleich 1 ist. Die Werthe von v ergeben sich durch Auflösung der Gleichung $\mathfrak{Z}_{\sigma+1} = 0$.

Die Coefficienten der L und M erhält man durch die Nenner und Zähler des Kettenbruchs:

$$1 - \cfrac{\varepsilon_0\lambda}{\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_0 - v - \cfrac{\lambda^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_3 - v - \cfrac{\lambda^2\varepsilon_3\varepsilon_4}{\varepsilon_4+\varepsilon_5 - v - \ddots}}}$$

der von selbst mit dem Gliede $\frac{\lambda^2 \varepsilon_{2n-2\sigma-3}\, \varepsilon_{2n-2\sigma-2}}{\varepsilon_{2n-2\sigma-2} + \varepsilon_{2n-2\sigma-1} - v}$ abbricht. Bezeichnen wir die Näherungsnenner dieses Kettenbruchs mit $\mathfrak{N}_0\ \mathfrak{N}_1 \ldots$, die Näherungszähler mit $\mathfrak{Z}_0$, $\mathfrak{Z}_1 \ldots$ in der Art, dass $\mathfrak{Z}_0 = 1$, $\mathfrak{N}_0 = 1$, so erhalten wir die Coefficienten der L aus der Proportion

$$\mathfrak{g}_s^{(1)} : \mathfrak{g}_s^{(3)} : \ldots : \mathfrak{g}_s^{(2n-2\sigma-1)} = 1 : \frac{-\varkappa\, \mathfrak{N}_1}{\sqrt{\varepsilon_1\, \varepsilon_2}} : \frac{(-\varkappa)^2\, \mathfrak{N}_2}{\sqrt{\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4}} : \ldots : \frac{(-\varkappa)^{n-\sigma-1}\, \mathfrak{N}_{n-\sigma-1}}{\sqrt{\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{2n-2\sigma-2}}}$$

Die Coefficienten der M erhalten wir aus der Proportion, die aus dieser entsteht, wenn wir statt der $\mathfrak{N}$ die $\mathfrak{Z}$ setzen. Die v sind im ersten Falle die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{N}_{n-\sigma} = 0$, im zweiten die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{Z}_{n-\sigma} = 0$.

Vergleicht man die Formeln dieses Paragraphen mit den von Heine gegebenen, so wird man bemerken, dass die letzteren fast sämmtlich einer Berichtigung bedürfen.

§ 5. Integration.

Bei Ausführung der Integration in den Ausdrücken 3) und 4) haben wir uns des folgenden Satzes zu bedienen. Es ist

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E_s^{(n)}(\mu_1)\, E_s^{(n)}(\nu_1)\, E_\tau^{(m)}(\mu_1)\, E_\tau^{(m)}(\nu_1) \sin\eta\, d\eta\, d\omega$$

gleich Null, falls nicht gleichzeitig $n = m$ und $s = \tau$ ist, in welchem Falle das Doppelintegral den Werth 8 hat.

Geht man nämlich auf die Gleichungen des Schema II zurück, so erkennt man sofort, indem man bekannte Sätze über die Kugelfunktionen (cf. H. I, 326 u. 27) in Anwendung bringt, dass das Doppelintegral erstens Null ist, wenn m und n verschieden sind, zweitens aber auch, wenn zwar $m = n$, $E_s^{(n)}$ und $E_\tau^{(n)}$ aber zu verschiedenen Klassen gehören. Ist $m = n$ und gehören $E_s^{(n)}$ und $E_\tau^{(n)}$ derselben Klasse an, so findet man auf dem bezeichneten Wege als Werth des Doppelintegrals

$$\frac{4\pi}{2n+1} \sum_m h_m^{(s)}\, h_m^{(\tau)}\, \frac{(-1)^m}{a_m^{(n)}},$$

wo die Summation sich nur über die geraden oder nur über die ungeraden Zahlen von 0 bis n erstreckt (im Falle der N erst von $m = 2$ an) und wo im Falle $m = 0$ für $a_0^{(n)}\, \frac{1}{2}\, a_0^{(n)}$ zu setzen ist. Nach Gleichung C) des vorigen § ist diese Summe gleich

$$8 \sum_m \mathfrak{g}_s^{(m)}\, \mathfrak{g}_\tau^{(m)}$$

Da die $\mathfrak{g}$ Coefficienten einer orthogonalen Substitution sind, so ist

$$\sum_m \mathfrak{g}_s^{(m)}\,\mathfrak{g}_\tau^{(m)} = 0, \text{ wenn } s \gtrless \tau$$
$$= 1, \text{ wenn } s = \tau,$$

und das Doppelintegral ist also auch wenn $m = n$ und $E_s^{(n)}$ und $E_\tau^{(n)}$ derselben Klasse angehören, gleich Null, wenn nicht $E_s^{(n)}$ und $E_\tau^{(n)}$ identisch sind, in welchem Falle das Doppelintegral gleich 8 wird. Damit ist der Eingangs erwähnte Satz bewiesen.

Wir bemerken noch, dass man den letzten Theil dieses Beweises auch vermittelst eines von Lamé gegebenen Satzes hätte erledigen können. Sind überhaupt m und n gleichartige Zahlen und gehören $E_s^{(n)}$ und $E_\tau^{(m)}$ derselben Klasse an, so ist unser Doppelintegral, wie man aus der Entwicklung nach Kugelfunktionen (cf. H. I, 329) erkennt, wie wir aber auch gleich direkt beweisen wollen, gleich dem Achtfachen des Integrals, in welchem sich beide Integrationen bis $\frac{\pi}{2}$ erstrecken, d. h. gleich

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} E_s^{(n)}(\mu_1)\,E_s^{(n)}(\nu_1)\,E_\tau^{(m)}(\mu_1)\,E_\tau^{(m)}(\nu_1)\sin\eta\,d\eta\,d\omega$$
$$= 8\int_0^{\tilde{\omega}} d\zeta_1 \int_0^{\omega} (\mu_1^2 - \nu_1^2)\,E_s^{(n)}(\mu_1)\,E_s^{(n)}(\nu_1)\,E_\tau^{(m)}(\mu_1)\,E_\tau^{(m)}(\nu_1)\,d\varepsilon_1$$

Nach dem angedeuteten Lamé'schen Satze (cf. H. I. 379) ist aber dieses Doppelintegral gleich Null, wenn nicht gleichzeitig $m = n$ und $s = \tau$ ist. Für diesen Fall haben wir aber in Gleichung 8) seinen Werth gleich 1 bestimmt. Lamé beweist seinen Satz, indem er auf die Differentialgleichung 7) für die Lamé'schen Funktionen zurückgeht. Da dieser Satz auch bei der Bestimmung der $\mathfrak{g}$ in Anwendung gekommen ist, so ist das Fundament unseres ersten Beweises auch dieser Lamé'sche Satz.

Die Gleichungen des Schema II werden aus Betrachtungen über die Natur der Funktionen E gewonnen. Wir werden also auch den Beweis unseres Satzes direkt aus solchen Betrachtungen ableiten können, ohne, wie es im Vorhergehenden geschehen ist, auf die Kugelfunktionen zurückgehen zu müssen.

Denken wir uns eine Kugelfläche vom Radius 1; dieselbe werde mit Masse derart belegt, dass, wenn γ_1, ω die Polarcoordinaten bezeichnen, die Dichtigkeit im Punkte (γ_1, ω) gleich $E_s^{(n)}(\mu_1)\,E_s^{(n)}(\nu_1)\,E_\tau^{(m)}(\mu_1)\,E_\tau^{(m)}(\nu_1)$ ist. Dann bedeutet unser Doppelintegral die Masse der ganzen Kugelfläche. Jedem Werthepaare γ_1, ω entspricht ein gewisses Werthepaar μ_1, ν_1. In jedem Octanten durchläuft ν_1 die Werthe von 0 bis b, μ_1 die Werthe

von b bis c, aber die verschiedenen Octanten unterscheiden sich dadurch, dass die Grössen ν_1, $\sqrt{b^2-\nu_1^2}$, $\sqrt{c^2-\mu_1^2}$ verschiedene Vorzeichen erhalten. Wir wollen nun zeigen, dass das Integral in allen Fällen, in denen es Null ist, entweder dadurch verschwindet, dass die Integrale über die verschiedenen Octanten sich gegenseitig aufheben, oder dadurch, dass das Integral über jeden einzelnen Octanten Null ist. Ist z. B. $E_s^{(n)}$ eine der Funktionen K, $E_\tau^{(m)}$ eine der Funktionen L, so ist das Integral gleich:

$$i\, c_s^{(n)}\, c_\tau^{(m)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\mu_1^n + a_1\,\mu_1^{n-2} + \ldots)\,(\nu_1^n + a_1\,\nu_1^{n-2} + \ldots)$$

$$\times \sqrt{\mu_1^2 - b^2}\,(\mu_1^{m-1} + b_1\,\mu_1^{m-3} + \ldots)\sqrt{b^2-\nu_1^2}\,(\nu_1^{m-1} + \ldots)\sin\eta\, d\eta\, d\omega$$

Ist nun $n-m$ gerade, so verschwindet das Integral deshalb, weil die Integrale über die Octanten mit positivem ν_1 sich gegen die Integrale über die Octanten mit negativem ν_1 fortheben. Ist aber $n-m$ ungerade, so verschwindet das Integral, weil die Integrale über die Octanten mit positiver $\sqrt{b^2-\nu_1^2}$ sich gegen die Octanten mit negativer $\sqrt{b^2-\nu_1^2}$ wegheben. Dasselbe findet auch in dem ersteren Falle statt; es ist überhaupt das Integral, erstreckt über zwei Octanten, welche symmetrisch in Bezug auf die xz-Ebene zu einander liegen, gleich Null.

Aehnliche Schlüsse können wir in allen Fällen machen, in denen die Funktionen $E_s^{(n)}$ und $E_\tau^{(m)}$ zu verschiedenen Klassen gehören. Gehören aber $E_s^{(n)}$ und $E_\tau^{(m)}$ zu derselben Klasse, sind z. B. beide von der Klasse K, so ist das Integral gleich:

$$c_s^{(n)}\, c_\tau^{(m)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\mu_1^n + a_1\,\mu_1^{n-2} + \ldots)\,(\nu_1^n + a_1\,\nu_1^{n-2} + \ldots)$$

$$\times (\mu_1^m + b_1\,\mu_2^{m-2} + \ldots)\,(\nu_1^m + b_1\,\nu_1^{m-2} + \ldots)\sin\eta\, d\eta\, d\omega$$

Ist nun $m-n$ ungerade, so heben sich die Integrale über die vier Octanten mit positivem ν_1 gegen die Integrale über die vier Octanten mit negativem ν_1 weg. Ist aber $m-n$ gerade, so sind die Integrale über die einzelnen Octanten alle einander gleich, und das ganze Integral ist gleich

$$8\int_0^{\tilde{\omega}} d\zeta_1 \int_0^{\omega} K_s^{(n)}(\mu_1)\, K_s^{(n)}(\nu_1)\, K_\tau^{(m)}(\mu_1)\, K_\tau^{(m)}(\nu_1)\,(\mu_1^2-\nu_1^2)\, d\varepsilon_1$$

Dieses Integral ist aber nach dem Lamé'schen Satze Null, wenn nicht zugleich $m=n$ und $s=\tau$ ist, in welchem Falle es gleich 1 wird. Genau denselben Schluss können wir machen, wenn die Funktionen $E_s^{(n)}$

und $E_\tau^{(m)}$ beide zu einer der Klassen L, M, N gehören. Damit ist der am Eingange unseres Paragraphen aufgestellte Satz von Neuem bewiesen.

Setzen wir nun in 3) für T und kA ihre Ausdrücke aus 14) und 15a) ein, so erhalten wir unter Anwendung des eben bewiesenen Satzes: Ist

$$kA = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{s=0}^{2n} b_s^{(n)} E_s^{(n)}(\mu_1) E_s^{(n)}(\nu_1),$$

so ist

$$18) \qquad V_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} E_s^{(n)}(\mu) E_s^{(n)}(\nu) F_s^{(n)}(\rho) \int_{r_1}^{r_0} \frac{b_s^{(n)} E_s^{(n)}(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\sqrt{\sigma^2 - c^2}}$$

Um V_ι zu finden, haben wir in 14) zunächst σ, μ_1, ν_1 mit resp. ρ, μ, ν zu vertauschen. Man findet:

$$19) \qquad V_\iota = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} E_s^{(n)}(\mu) E_s^{(n)}(\nu) E_s^{(n)}(\rho) \int_{r_1}^{r_0} \frac{b_s^{(n)} E_s^{(n)}(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\sqrt{\sigma^2 - c^2}}$$

Während also V_α die (transcendenten) Lamé'schen Funktionen zweiter Art enthält, enthält V_ι nur die (algebraischen) Lamé'schen Funktionen erster Art.

Ebenso findet man aus 4): Ist

$$\frac{\varkappa}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{s=0}^{2n} b_s^{(n)} E_s^{(n)}(\mu_1) E_s^{(n)}(\nu_1),$$

so ist:

$$20) \qquad v_\alpha = \mathfrak{r}\sqrt{\mathfrak{r}^2 - b^2}\sqrt{\mathfrak{r}^2 - c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} b_s^{(n)} E_s^{(n)}(\mathfrak{r}) E_s^{(n)}(\mu) E_s^{(n)}(\nu) F_s^{(n)}(\rho)$$

$$21) \qquad v_\iota = \mathfrak{r}\sqrt{\mathfrak{r}^2 - b^2}\sqrt{\mathfrak{r}^2 - c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} b_s^{(n)} F_s^{(n)}(\mathfrak{r}) E_s^{(n)}(\mu) E_s^{(n)}(\nu) E_s^{(n)}(\rho)$$

Die $b_s^{(n)}$ enthalten im allgemeinen noch $\mathfrak{r}$.

§ 6. Das Potential des homogenen Ellipsoids.

Wir wollen nun die obigen Formeln benutzen, um das Potential des homogenen Ellipsoids zu berechnen. In diesem Falle ist also $k = 1$. Wir haben zunächst die b zu berechnen und bedürfen dazu der Kenntniss der α. Entwickelt man A nach Kugelfunktionen, so findet man, indem man zur Abkürzung

$$b^2 + c^2 = p, \quad b^2 c^2 = q$$

setzt:

$$\frac{1}{2}\alpha_0^{(0)} = 4\pi\left(\sigma^4 - \frac{2}{3}p\sigma^2 + \frac{1}{3}q\right)$$

$$- \frac{4\pi}{3}\sqrt{\sigma^2 - b^2}\sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma\sqrt{\sigma^2 - b^2}\sqrt{\sigma^2 - c^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\alpha_0^{(2)} = \frac{4\pi}{5}\left[q - \frac{1}{2}p\sigma^2\right]$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{2\pi}{5}(c^2 - b^2)\,\sigma^2\ *)$$

Alle übrigen α und sämmtliche a sind Null. Demnach sind auch sämmtliche b mit Ausnahme von $b_0^{(0)}$, $b_0^{(2)}$ und $b_1^{(2)}$ gleich Null, und wir brauchen also die g nur für die Fälle $n = 0$ und $n = 2$ zu berechnen. Wir erkennen zugleich, dass die Ausdrücke für V_α und V_ι nur die Funktionen $K_0^{(0)}$, $K_0^{(2)}$, $K_1^{(2)}$ und die ihnen entsprechenden F enthalten werden.

Für $n = 0$ ist $g_0^{(0)} = 1$, also nach Gleichung B) des § 4, $g_0^{(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ und demnach

23) $$b_0^{(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{2}\,\alpha_0^{(0)}.$$

Für $n = 2$ erhalten wir nach dem in § 4 angegebenen Verfahren:

$$g_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varkappa^2(3 - \mathfrak{K}_0)^2}{3}}}, \qquad g_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varkappa^2(3 - \mathfrak{K}_1)^2}{3}}}$$

$$g_0^{(2)} = \frac{-\varkappa(3 - \mathfrak{K}_0)}{\sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{\varkappa^2(3 - \mathfrak{K}_0)^2}{3}}}, \quad g_1^{(2)} = \frac{-\varkappa(3 - \mathfrak{K}_1)}{\sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{\varkappa^2(3 - \mathfrak{K}_1)^2}{3}}}$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ die Wurzeln der Gleichung

$$3 - 3\lambda - 4v + v^2 = v(v - 4) + \frac{12q}{p^2} = 0,$$

sodass

24) $$p\mathfrak{K}_0 = 2\left(p + \sqrt{p^2 - 3q}\right),\ p\mathfrak{K}_1 = 2\left(p - \sqrt{p^2 - 3q}\right)$$

ist. Nach Gleichung B) ist demnach, da $a_0^{(2)} = \frac{9}{2}$, $a_2^{(2)} = \frac{3}{4}$, $\varkappa = \frac{p}{\sqrt{p^2 - 4q}}$.

25)
$$g_0^{(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{15}}\,\frac{p^2 - 4q}{\sqrt{6(p^2 - 2q) - p^2\mathfrak{K}_0}}, \quad g_1^{(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{15}}\,\frac{p^2 - 4q}{\sqrt{6(p^2 - 2q) - p^2\mathfrak{K}_1}}$$

$$g_0^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{15}}\,\frac{-p(3 - \mathfrak{K}_0)}{\sqrt{6(p^2 - 2q) - p^2\mathfrak{K}_0}}, \quad g_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{15}}\,\frac{-p(3 - \mathfrak{K}_1)}{\sqrt{6(p^2 - 2q) - p^2\mathfrak{K}_1}}$$

*) Der von Heine (II, 153) gegebene Ausdruck für $\alpha_2^{(2)}$ ist noch mit dem Faktor $-\sigma^2$ zu versehen.

Nach 16) ist nun

$$b_0^{(2)} = \frac{1}{2}\alpha_0^{(2)} g_0^{(0)} + \alpha_2^{(2)} g_0^{(2)}$$

$$b_1^{(2)} = \frac{1}{2}\alpha_0^{(2)} g_1^{(0)} + \alpha_2^{(2)} g_1^{(2)}$$

Setzt man für α ihre Werthe ein, benutzt die Gleichungen

$$g_0^{(2)} = -\varkappa(3 - \mathfrak{K}_0) g_0^{(0)}$$

$$g_1^{(2)} = -\varkappa(3 - \mathfrak{K}_1) g_1^{(0)},$$

und setzt zur Abkürzung:

26)
$$\frac{1}{6} p (4 - \mathfrak{K}_0) = \frac{1}{6} p \mathfrak{K}_1 = \alpha^2$$

$$\frac{1}{6} p (4 - \mathfrak{K}_1) = \frac{1}{6} p \mathfrak{K}_0 = \beta^3,$$

so findet man

27)
$$b_0^{(2)} = -\frac{4\pi}{5} g_0^{(0)} 3\alpha^2 (\sigma^2 - \beta^2)$$

$$b_1^{(2)} = -\frac{4\pi}{5} g_1^{(0)} 3\beta^2 (\sigma^2 - \alpha^2)$$

Was nun die Funktionen K anbetrifft, so ist $K_0^{(0)}$ eine Constante $c_0^{(0)}$, welche nach Gleichung 8) dadurch bestimmt wird, dass

$$\left(c_0^{(0)}\right)^4 \int_0^{\tilde{\omega}} d\zeta \int_0^{\omega} (\mu^2 - \nu^2)\, d\varepsilon = \left(c_0^{(0)}\right)^4 \frac{\pi}{2} = 1$$

wird, also:

$$K_0^{(0)} = c_0^{(0)} = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}$$

Für $K_0^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ findet man (H. I, 365)

$$K_0^{(2)}(\mu) = c_0^{(2)}(\mu^2 - \alpha^2), \quad K_1^{(2)}(\mu) = c_1^{(2)}(\mu^2 - \beta^2)$$

und $c_0^{(2)}$ und $c_1^{(2)}$ werden durch die Gleichungen bestimmt:

28)
$$\left(c_0^{(2)}\right)^4 \int_0^{\tilde{\omega}} d\zeta \int_0^{\omega} (\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \alpha^2)^2 (\nu^2 - \alpha^2)^2\, d\varepsilon = 1$$

$$\left(c_1^{(2)}\right)^4 \int_0^{\tilde{\omega}} d\zeta \int_0^{\omega} (\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \beta^2)^2 (\nu^2 - \beta^2)^2\, d\varepsilon = 1.$$

Die Auswerthung dieser Integrale könnte dadurch geschehen, dass wir statt μ und ν wieder θ und ψ einführen. Dann wird $(\mu^2 - \nu^2)\, d\varepsilon d\zeta$

$= \sin\theta d\theta d\psi$, und die übrigen Faktoren werden ganze Funktionen von $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta\cos^2\psi$, $\sin^2\theta\sin^2\psi$, denn es ist:

$$\mu^2\nu^2 = b^2c^2\cos^2\theta$$

$$\mu^2+\nu^2 = b^2+c^2-b^2\sin^2\theta\cos^2\psi - c^2\sin^2\theta\sin^2\psi$$

Die Auswerthung der beiden Integrale würde aber immerhin umständlich sein. Schneller erhalten wir $c_0^{(2)}$ und $c_1^{(2)}$ aus einer der Gleichungen:

$$C_0^{(2)}(\theta,\psi) = g_0^{(0)} K_0^{(2)}(\mu) K_0^{(2)}(\nu) + g_1^{(0)} K_1^{(2)}(\mu) K_1^{(2)}(\nu)$$

$$C_2^{(2)}(\theta,\psi) = g_0^{(2)} K_0^{(2)}(\mu) K_0^{(2)}(\nu) + g_1^{(2)} K_1^{(2)}(\mu) K_1^{(2)}(\nu)$$

indem wir $C_0^{(2)}$ und $C_2^{(2)}$ in μ und ν umsetzen. So folgt aus der ersten Gleichung, da

$$C_0^{(2)}(\theta,\psi) = \cos^2\theta - \frac{1}{3} = \frac{\mu^2\nu^2}{b^2c^2} - \frac{1}{3}$$

die Gleichung:

$$\frac{\mu^2\nu^2}{b^2c^2} - \frac{1}{3} = g_0^{(0)}\left(c_0^{(2)}\right)^2(\mu^2-\alpha^2)(\nu^2-\alpha^2) + g_1^{(0)}\left(c_1^{(2)}\right)^2(\mu^2-\beta^2)(\nu^2-\beta^2),$$

welche durch Vergleichung der Coefficienten ergiebt:

$$g_0^{(0)}\left(c_0^{(2)}\right)^2 + g_1^{(0)}\left(c_1^{(2)}\right)^2 = \frac{1}{b^2c^2} = \frac{1}{3\alpha^2\beta^2}$$

$$g_0^{(0)}\alpha^2\left(c_0^{(2)}\right)^2 + g_1^{(0)}\beta^0\left(c_1^{(0)}\right)^0 = 0$$

$$g_0^{(0)}\alpha^4\left(c_0^{(2)}\right)^2 + g_1^{(0)}\beta^4\left(c_1^{(2)}\right)^0 = -\frac{1}{3}$$

Man findet, dass in der That sämmtliche drei Gleichungen befriedigt werden durch die Werthe:

29)

$$\left(c_0^{(2)}\right)^2 = \frac{-1}{g_0^{(0)}3\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)}$$

$$\left(c_1^{(2)}\right)^2 = \frac{1}{g_1^{(0)}3\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}$$

Man überzeugt sich leicht, dass man aus der zweiten Gleichung dieselben Werthe erhalten würde.

Die $F_0^{(0)}$, $F_0^{(2)}$, $F_1^{(2)}$ ergeben sich nach 9) unmittelbar aus den K.

$$F_0^{(0)}(\rho) = \frac{1}{c_0^{(0)}}\int_\rho^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^2-b^2}\sqrt{s^2-c^2}}$$

$$F_0^{(2)}(\rho) = \frac{5(\rho^2 - \alpha^2)}{c_0^{(2)}} \int_\rho^\infty \frac{ds}{(s^2 - \alpha^2)^2 \sqrt{s^2 - b^2}\sqrt{s^2 - c^2}}$$

$$F_1^{(2)}(\rho) = \frac{5(\rho^2 - \beta^2)}{c_1^{(2)}} \int_\rho^\infty \frac{ds}{(s^2 - \beta^2)^2 \sqrt{s^2 - b^2}\sqrt{s^2 - c^2}}$$

Hätte man $A = (\sigma^2 - \mu_1^2)(\sigma^2 - \nu_1^2)$ auf dem von Lamé angegebenen Wege entwickeln wollen, so würde man zunächst schliessen, dass in dieser Entwicklung nur Produkte der K vorkommen können, da A ganz in μ_1 und ν_1 ist. Da A ferner eine gerade Funktion von μ_1 und ν_1 ist, so kommen nur K mit geradem n vor:

$$A = \sum_{n=0,2,4\ldots} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{s=0}^{n} b_s^{(n)} K_s^{(n)}(\mu_1) K_s^{(n)}(\nu_1)$$

und zur Bestimmung der $b_s^{(n)}$ hätte man dann die Gleichung:

$$\frac{2n+1}{4\pi} b_s^{(n)} = \int_0^\omega d\zeta \int_0^\omega (\mu^2 - \nu^2)(\sigma^2 - \mu^2)(\sigma^2 - \nu^2) K_s^{(n)}(\mu) K_s^{(n)}(\nu)\, d\varepsilon$$

Ueber die Auswerthung dieser Integrale wäre dasselbe zu bemerken, was oben über die Integrale 28) gesagt ist.

Am schnellsten würde man überhaupt zur Entwicklung von A kommen, wenn man setzte:

$$(\sigma^2 - \mu_1^2)(\sigma^2 - \nu_1^2) = A_1 K_0^{(0)}(\mu_1) K_0^{(0)}(\nu_1) + B_1 K_0^{(2)}(\mu_1) K_0^{(2)}(\nu_1) + C_1 K_1^{(2)}(\mu_1) K_0^{(2)}(\nu_1).$$

Man würde dann in Uebereinstimmung mit 23), 27) und 29) finden:

$$A_1 = \frac{b_0^{(0)}}{4\pi} = \frac{1}{(c_0^{(0)})^2}[\sigma^4 - \sigma^2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2]$$

$$B_1 = b_0^{(2)} \frac{5}{4\pi} = \frac{1}{(c_0^{(2)})^2} \frac{\sigma^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$C_1 = b_1^{(2)} \frac{5}{4\pi} = \frac{-1}{(c_1^{(2)})^2} \frac{\sigma^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}$$

Zur Bestimmung der c (wenn man sie überhaupt ermitteln will) hätte man dann aber doch entweder die Integrale 28) auszuwerthen oder die g zu ermitteln.

Die in 18) angedeuteten Integrationen nach σ sind nun sehr leicht auszuführen, wenn man berücksichtigt, dass

$$(\sigma^2 - \alpha^2)(\sigma^2 - \beta^2) = \sigma^4 - \frac{2}{3} p \sigma^2 + \frac{1}{3} q$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\sigma^2 - b^2} \sqrt{\sigma^2 - c^2} \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \sqrt{\sigma^2 - b^2} \sqrt{\sigma^2 - c^2}\right)$$

Handelt es sich um das Potential eines vollen Ellipsoids, so ist $r_1 = c$ zu setzen. Man findet: Das Potential eines vollen homogenen Ellipsoids von der Dichtigkeit 1 und mit den Achsen r, $\sqrt{r^2 - b^2}$, $\sqrt{r^2 - c^2}$ in einem äusseren Punkte (ρ, μ, ν) ist gleich

$$V_\alpha = 4\pi r \sqrt{r^2 - b^2} \sqrt{r^2 - c^2} \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} c_0^{(0)} F_0^{(0)}(\rho) K_0^{(0)}(\mu) K_0^{(0)}(\nu) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{5} g_0^{(0)} \alpha^2 c_0^{(2)} F_0^{(2)}(\rho) K_0^{(2)}(\mu) K_0^{(2)}(\nu) - \frac{1}{5} g_1^{(0)} \beta^2 c_1^{(2)} F_1^{(2)}(\rho) K_1^{(2)}(\mu) K_1^{(2)}(\nu) \right\}$$

Die Ausführung der Integration nach σ in 19) gelingt ebenfalls und zwar durch Anwendung einer partiellen Integration. Man findet:

$$V_\iota = 4\pi \left\{ K_0^{(0)}(\mu) K_0^{(0)}(\nu) K_0^{(0)}(\rho) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sigma \sqrt{\sigma^2 - b^2} \sqrt{\sigma^2 - c^2} F_0^{(0)}(\sigma) + \frac{1}{c_0^{(0)}} \frac{\sigma^2}{2} \right]_{r_1}^{r_0} \right.$$

$$- K_0^{(2)}(\mu) K_0^{(2)}(\nu) K_0^{(2)}(\rho) g_0^{(0)} \alpha^2 \left[\sigma \sqrt{\sigma^2 - b^2} \sqrt{\sigma^2 - c^2} \frac{c_0^{(2)} F_0^{(2)}(\sigma)}{5 K_0^{(2)}(\sigma)} - \frac{1}{2} \frac{}{K_0^{(2)}(\sigma)} \right]_{r_1}^{r_0}$$

$$\left. - K_1^{(2)}(\mu) K_1^{(2)}(\nu) K_1^{(2)}(\rho) g_1^{(0)} \beta^2 \left[\sigma \sqrt{\sigma^2 - b^2} \sqrt{\sigma^2 - c^2} \frac{c_1^{(2)} F_1^{(2)}(\sigma)}{5 K_1^{(2)}(\sigma)} - \frac{1}{2} \frac{}{K_1^{(2)}(\sigma)} \right]_{r_1}^{r_0} \right\}$$

Der Vollständigkeit wegen setzen wir noch den Ausdruck für V_μ hierher, wie er sich aus den beiden Ausdrücken für V_α und V_ι ergiebt. Das Potential eines homogenen Voll-Ellipsoids mit den Achsen r, $\sqrt{r^2 - b^2}$, $\sqrt{r^2 - c^2}$ in einem innerhalb des Ellipsoids gelegenen Punkte (ρ, μ, ν) ist:

$$V_\mu = 4\pi r \sqrt{r^2 - b^2} \sqrt{r^2 - c^2} \left\{ K_0^{(0)}(\mu) K_0^{(0)}(\nu) K_0^{(0)}(\rho) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_0^{(0)}(r) \right.$$

$$- K_0^{(2)}(\mu) K_0^{(2)}(\nu) K_0^{(2)}(\rho) g_0^{(0)} \alpha^2 \frac{c_0^{(2)} F_0^{(2)}(r)}{5 K_0^{(2)}(r)}$$

$$\left. - K_1^{(2)}(\mu) K_1^{(2)}(\nu) K_1^{(2)}(\rho) g_1^{(0)} \beta^2 \frac{c_1^{(2)} F_1^{(2)}(r)}{5 K_1^{(2)}(r)} \right\}$$

$$+ 2\pi \Big\{ K_0^{(0)}(\mu)\, K_0^{(0)}(\nu)\, \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, (r^2 - \rho^2)$$

$$+ K_0^{(2)}(\mu)\, K_0^{(2)}(\nu)\, g_0^{(0)}\, \alpha^2 \left(\frac{K_0^{(2)}(\rho)}{K_0^{(2)}(r)} - 1 \right) + K_1^{(2)}(\mu)\, K_1^{(2)}(\nu)\, g_1^{(0)}\, \beta^2 \left(\frac{K_1^{(2)}(\rho)}{K_1^{(2)}(r)} - 1 \right) \Big\}$$

Während also V_α eine elliptische Transcendente in Bezug auf ρ ist, haben V_ι und V_μ die Form:

$$A\,\mu^2\,\nu^2\,\rho^2 + B\,\mu^2\,\nu^2 + C(\mu^2 + \nu^2)\,\rho^2 + D\,\rho^2 + E(\mu^2 + \nu^2) + F$$

Für V_ι ist noch $B = C$ und $D = E$.

Man könnte diese Ausdrücke nun dadurch verificiren, dass man sie wieder in Kugelfunktionen umsetzte und mit den bekannten Ausdrücken des Potentials in Kugelfunktionen verglich. Wir führen diese Rechnung nicht aus, weil wir sogleich im zweiten Abschnitt dazu übergehen wollen, die Potentialausdrücke nicht nur für den speciellen Fall $k = 1$, sondern allgemein zu vergleichen.

II. Vergleichung der Darstellungen durch Lamé'sche Produkte mit denen durch Kugelfunktionen.

§ 1. Die Darstellungen von T, V, v durch Kugelfunktionen.

Der Darstellung der Potentiale V, v durch Kugelfunktionen von θ und ψ geht naturgemäss die von T vorauf. Setzt man

$$A = \rho + \sqrt{\rho^2 - b^2}\cos v \cos iu + \sqrt{\rho^2 - c^2}\sin v \sin iu$$

$$B = \sigma + \sqrt{\sigma^2 - b^2}\cos v \cos \chi + \sqrt{\sigma^2 - c^2}\sin v \sin \chi,$$

$$U_\varkappa^{(m)}(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\, m v\, dv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos i\varkappa u\, du}{A^{n+1}}$$

$$u_\varkappa^{(m)}(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\, m v\, dv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin i\varkappa u\, du}{A^{n+1}}$$

$$W_\varkappa^{(m)}(\sigma) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\, m v\, dv \int_0^{2\pi} B^n \cos \varkappa\chi\, d\chi$$

$$w_\varkappa^{(m)}(\sigma) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\, m v\, dv \int_0^{2\pi} B^n \sin \varkappa\chi\, d\chi$$

$$a_\varkappa^{(n)} = \frac{2\,[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)]^2}{\Pi(n+\varkappa)\,\Pi(n-\varkappa)}$$

so wird die Entwicklung von T nach Kugelfunktionen von θ und ψ, die zugleich Kugelfunktionen von η und ω sind, durch die Gleichungen gefunden (H. II, 141)

30) $$T = \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{T}^{(n)}, \quad \mathfrak{T}^{(n)} = (8n+4)\,(\mathfrak{C} + \mathfrak{S}),$$

$$\mathfrak{C} = \sum_{\varkappa=0}^{n}{}' (-1)^\varkappa a_\varkappa^{(n)} P_\varkappa^{(n)}(\cos\theta) \cos \varkappa\psi \sum_{\iota=0}^{n}{}' P_\iota^{(n)}(\cos\eta) \cos \iota\omega \sum_{m=0}^{n}{}' U_\varkappa^{(m)}(\rho)\, W_\iota \quad (\sigma)$$

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varkappa=1}^{n} (-1)^\varkappa a_\varkappa^{(n)} P_\varkappa^{(n)}(\cos\theta) \sin \varkappa\psi \sum_{\iota=1}^{n} P_\iota^{(n)}(\cos\eta) \sin \iota\omega \sum_{m=1}^{n} u_\varkappa^{(m)}(\rho)\, w_\iota^{(m)}(\sigma)$$

wenn die Summationen zuerst über alle geraden ι, $\varkappa$, m, denn über alle ungeraden ausgeführt werden, so dass $\mathfrak{C}$ und ebenso $\mathfrak{S}$ in die Summe von

zwei, also $\mathfrak{T}^{(n)}$ in die Summe von vier Aggregaten zerfällt*). (In dem Heine'schen Ausdruck für $\mathfrak{T}^{(n)}$ ist rechts der Faktor $\frac{1}{\pi}$ zu streichen.) Durch den dem Summenzeichen beigefügten Strich wird, wie auch schon im Vorigen, angedeutet, dass dem Gliede, für welches resp. $\varkappa = 0$, $\iota = 0$, $m = 0$, der Faktor $\frac{1}{2}$ beizufügen ist. Speciell heben wir schon hier hervor, dass in $\mathfrak{T}^{(n)}$ und im Folgenden stets nur solche U, u, W, w in Betracht kommen, bei denen beide Indices gleichartig, beide also gerade oder beide ungerade, sind.

Aus T findet man nun unmittelbar:

31) $$V_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Z^{(n)}$$

$$Z^{(n)} = \sum_{\varkappa=0}^{n}{}' a_\varkappa^{(n)} P_\varkappa^{(n)}(\cos\theta) \sum_{m=0}^{n}{}' [g_m \cos \varkappa\psi\, U_\varkappa^{(m)}(\rho) + \mathfrak{g}_m \sin \varkappa\psi\, u_\varkappa^{(m)}(\rho)]$$

wo

$$g_m = \sum_{\iota=0}^{n}{}' \frac{1}{a_\iota^{(n)}} \int_{r_1}^{r_0} \frac{\alpha_\iota^{(n)} W_\iota^{(m)}(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\,\sqrt{\sigma^2 - c^2}}$$

$$\mathfrak{g}_m = \sum_{\iota=0}^{n}{}' \frac{1}{a_\iota^{(n)}} \int_{r_1}^{r_0} \frac{\mathfrak{a}_\iota^{(n)} w_\iota^{(m)}(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\,\sqrt{\sigma^2 - c^2}}$$

und $\alpha_\iota^{(n)}$ und $\mathfrak{a}_\iota^{(n)}$ die durch Gleichung 15) bestimmte Bedeutung haben.

Bei der Bestimmung von V_ι ist aber zu beachten, dass die Gültigkeit der Gleichung 30) an die Bedingung geknüpft ist: $\rho > \sigma$, und dass man demnach in T, ehe man den Ausdruck in das Integral für V_ι einsetzt, ρ, θ, ψ mit resp. σ, η, ω zu vertauschen hat. Dadurch dass Heine diese Bedingung nicht beachtet, gelangt er zu einem falschen Resultat für V_ι. Man findet:

32) $$V_\iota = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Z^{(n)}$$

$$Z^{(n)} = \sum_{\varkappa=0}^{n}{}' P_\varkappa^{(n)}(\cos\theta) \sum_{m=0}^{n}{}' [h_m \cos \varkappa\psi\, W_\varkappa^{(m)}(\rho) + \mathfrak{h}_m \sin \varkappa\psi\, w_\varkappa^{(m)}(\rho)]$$

*) Zu dem Heine'schen Beweise dass $\mathfrak{T}^{(n)}$ eine ganze Funktion von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sei (H. II, 143) ist zu bemerken, dass $\beta\tau = \mathfrak{a} + i\mathfrak{b}\cos v + i\mathfrak{c}\sin v$ und dass C demnach eine Constante in Bezug auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ist, die nur noch v enthält. Würde C auch noch ξ enthalten, so wäre C, wie ξ, eine Funktion von σ und damit von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, und der Beweis würde hinfällig werden.

wo

$$h_m = \sum_{\iota=0}^{n}{}' \int_{r_1}^{r_0} \frac{\alpha_\iota^{(n)} U_\iota^{(m)}(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\,\sqrt{\sigma^2 - c^2}}$$

$$\mathfrak{h}_m = \sum_{\iota=0}^{n}{}' \int_{r_1}^{r_0} \frac{\mathfrak{a}_\iota^{(n)} u_\iota^{(m)}(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\,\sqrt{\sigma^2 - c^2}}$$

Betreffs der Summationen nach ι, $\varkappa$, m in V_α und V_ι gilt dasselbe, was vorher bei T bemerkt wurde.

Man findet ferner:

33) $$v_\alpha = 4r\sqrt{r^2 - b^2}\,\sqrt{r^2 - c^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Z^{(n)}$$

$$Z^{(n)} = \Sigma' \frac{a_\varkappa^{(n)}}{a_\iota^{(n)}} P_\varkappa^{(n)}(\cos\theta)\,[\alpha_\iota^{(n)} \cos\varkappa\psi\; U_\varkappa^{(m)}(\rho)\; W_\iota^{(m)}(r) + \mathfrak{a}_\iota^{(n)} \sin\varkappa\psi\; u_\varkappa^{(m)}(\rho)\; w_\iota^{(m)}(r)]$$

wo das Summenzeichen eine dreifache Summe nach ι, $\varkappa$, m bedeutet, die, wie vorher, nur über gleichartige Werthe zu nehmen ist, und wo α und $\mathfrak{a}$ die ihnen in Gleichung 17) beigelegte Bedeutung haben.

Um v_ι zu erhalten, hat man U mit W, u mit w zu vertauschen und, wie wir berichtigend hinzufügen, den Faktor $\frac{a_\varkappa^{(n)}}{a_\iota^{(n)}}$ wegzulassen.

Heine berechnet nach 31) das Potential eines homogenen Ellipsoids in einem äussern Punkte und verificirt dann den gewonnenen Ausdruck dadurch, dass er ihn durch Wiedereinführung der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z an Stelle von ρ, θ, ψ auf den bekannten Dirichlet'schen Ausdruck zurückführt. (In den Ausdrücken für $Z^{(0)}$ und $Z^{(0)}$ sind links resp. die Faktoren 4 und 20 hinzuzufügen.) Dieselbe Rechnung habe ich in einer mit dieser Dissertation eingereichten Note für V_ι ausgeführt und damit die Gleichung 32) verificirt.

§ 2. Die Relationen zwischen den U, u, W, w einerseits und den Lamé'schen Funktionen andererseits.

Setzt man den Ausdruck 14) für T vermittelst der Gleichungen des Schema II in Kugelfunktionen um und den so entstehenden Ausdruck dem Ausdrucke 30) für T gleich, so erhält man durch wiederholte Anwendung des Satzes, dass $\sum_\varkappa b_\varkappa C_\varkappa(\theta, \psi)$ und $\sum_\varkappa b_\varkappa S_\varkappa(\theta, \psi)$ nicht anders verschwinden

können, als indem sämmtliche Coefficienten verschwinden, das folgende Gleichungssystem:

$$(8n+4)\, a_\pi^{(n)} \sum_m{}' U_\pi^{(m)}(\rho)\, W_p^{(m)}(\sigma) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=0}^{\sigma} h_\pi^{(s)} h_p^{(s)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

$$(8n+4)\, a_\iota^{(n)} \sum_m U_\iota^{(m)}(\rho)\, W_j^{(m)}(\sigma) = -\frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=\sigma+1}^{n} h_\iota^{(s)} h_j^{(s)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

34)

$$(8n+4)\, a_\iota^{(n)} \sum_m u_\iota^{(m)}(\rho)\, w_j^{(m)}(\sigma) = -\frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=n+1}^{2n-\sigma} h_\iota^{(s)} h_j^{(s)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

$$(8n+4)\, a_\pi^{(n)} \sum_m u_{\pi_\zeta}^{(m)}(\rho)\, w_p^{(m)}(\sigma) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=2n-\sigma+1}^{2n} h_\pi^{(s)} h_p^{(s)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

Die Summationen nach m linker Hand beziehen sich stets nur auf die mit den unteren Indices gleichartigen Zahlen. In der ersten Gleichung ist, wenn eine der Zahlen π, p Null ist, der Faktor $\frac{1}{2}$, wenn beide Null sind, der Faktor $\frac{1}{4}$ linker Hand hinzuzufügen. Führen wir statt der h die g ein, vermittelst der aus den Gleichungen B) und C) S. 17 folgenden Gleichung:

$$h_m^{(s)} = (-1)^m\, g_s^{(m)}\, \frac{2(2n+1)}{\pi}\, a_m^{(n)},$$

in welcher für $m = 0$ wieder $\frac{1}{2} a_0^{(n)}$ an Stelle von $a_0^{(n)}$ zu setzen ist, so wird unser Gleichungssystem:

$$\sum_m{}' U_\pi^{(m)}(\rho)\, W_p^{(m)}(\sigma) = \frac{a_p^{(n)}}{2\pi} \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\pi)} g_s^{(p)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

III.

$$\sum_m U_\iota^{(m)}(\rho)\, W_j^{(m)}(\sigma) = -\frac{a_j^{(n)}}{2\pi} \sum_{s=\sigma+1}^{n} g_s^{(\iota)} g_s^{(j)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

$$\sum_m u_\iota^{(m)}(\rho)\, w_j^{(m)}(\sigma) = -\frac{a_j^{(n)}}{2\pi} \sum_{s=n+1}^{2n-\sigma} g_s^{(\iota)} g_s^{(j)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

$$\sum_m u_\pi^{(m)}(\rho)\, w_p^{(m)}(\sigma) = \frac{a_p^{(n)}}{2\pi} \sum_{s=2n-\sigma+1}^{2n} g_s^{(\pi)} g_s^{(p)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

Die erste Gleichung gilt jetzt unverändert auch für den Fall, dass p oder π oder beide gleich Null sind.

Eine einfache Ueberlegung würde zeigen, dass man auf genau dieselben Gleichungen III geführt wird, wenn man die Potentialausdrücke, also die Ausdrücke 18) und 31) für V_α, oder die Ausdrücke 19) und

32) für V_ι, oder die Ausdrücke 20) und 33) für v_α oder endlich die beiden Ausdrücke für v_ι mit einander vergleicht.

Wir können aus diesen Gleichungen sofort eine Folgerung ziehen. Da die rechten Seiten der Gleichungen 34) unverändert bleiben, wenn man p und π oder ι und j mit einander vertauscht, so muss dies auch mit den linken Seiten der Fall sein, d. h. es muss sein:

$$35) \quad \begin{aligned} a_\varkappa^{(n)} \sum_m{}' U_\varkappa^{(m)}(\rho)\, W_\lambda^{(m)}(\sigma) &= a_\lambda^{(n)} \sum_m{}' U_\lambda^{(m)}(\rho)\, W_\varkappa^{(m)}(\sigma) \\ a_\varkappa^{(n)} \sum_m u_\varkappa^{(m)}(\rho)\, w_\lambda^{(m)}(\sigma) &= a_\lambda^{(n)} \sum_m u_\lambda^{(m)}(\rho)\, w_\varkappa^{(m)}(\sigma) \end{aligned}$$

wo $\varkappa$ und λ zwei gleichartige Zahlen bezeichnen und die Summation nach m sich über die mit denselben gleichartigen Zahlen erstreckt. Die Gleichungen besagen im Grunde nur, dass, da der Ausdruck 14) unverändert bleibt, wenn man μ und ν mit resp. μ_1 und ν_1 vertauscht, auch der Ausdruck 30) unverändert bleiben muss, wenn man in ihm θ und ψ mit resp. η und ω vertauscht, dass also die Coefficienten von $C_\varkappa(\theta, \psi)\, C_\lambda(\eta, \omega)$ und $C_\lambda(\theta, \psi)\, C_\varkappa(\eta, \omega)$ gleich sein müssen. Es folgen die letzten Gleichungen also auch, ebenso wie jene Symmetrie in Bezug auf μ und μ_1, ν und ν_1, unmittelbar aus der Beschaffenheit von T.

Betrachten wir nun die erste Gleichung des Schema III:

$$\sum_m{}' U_\pi^{(m)}(\rho)\, W_p^{(m)}(\sigma) = \frac{a_p^{(n)}}{2\pi} \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\pi)}\, g_s^{(p)}\, F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

Angenommen, es wären sämmtliche W bekannt, so könnten wir, indem wir π einen festen Werth, p aber die $\sigma+1$ Werthe $0, 2, 4 \ldots 2\sigma$ geben, $\sigma+1$ Gleichungen bilden, aus denen sich die $\sigma+1$ Funktionen $U_\pi^{(0)}(\rho)$, $U_\pi^{(2)}(\rho) \ldots U_\pi^{(2\sigma)}(\rho)$ als lineare Funktionen der $F_s^{(n)}$ bestimmen lassen müssen. Umgekehrt, sind sämmtliche U bekannt, so können wir die $\sigma+1$ Funktionen $W_p^{(0)}$, $W_p^{(2)} \ldots W_p^{(2\sigma)}$ als lineare Funktionen der $E_s^{(n)}$ bestimmen. Ohne nun aber die W vollständig zu kennen, wird es uns dadurch möglich werden, das Gleichungssystem nach den U aufzulösen, dass wir über den Grad der W etwas aussagen und in einigen Fällen auch den Coefficienten der höchsten Potenz bestimmen können.

§ 3. Eigenschaften der W, w; Recursionsformeln für die W, w.

Die Funktionen W und w sind offenbar ganze Funktionen höchstens $n$ten Grades von σ, $\sqrt{\sigma^2-b^2}$, $\sqrt{\sigma^2-c^2}$. Wir behaupten nun zunächst, dass

$$W_\varkappa^{(m)} = W_m^{(\varkappa)}, \quad w_\varkappa^{(m)} = w_m^{(\varkappa)}$$

Entwickelt man nämlich B^n nach dem trinomischen Satz, so erhält man

$$W_\varkappa^{(m)} = \sum_{\beta,\gamma} n_\gamma\,(n-\gamma)_\beta\,\sigma^{n-\beta-\gamma}\,\sqrt{\sigma^2-b^2}^{\beta}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}^{\gamma}$$
$$\times\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\beta v\,\sin^\gamma v\,\cos m v\,dv\int_0^{2\pi}\cos^\beta\chi\,\sin^\gamma\chi\,\cos\varkappa\chi\,d\chi$$

wo die Summationen nach β und γ sich über alle ganze Zahlen von 0 bis n erstrecken. Das letzte Integral ist nun nur dann von Null verschieden, wenn $\beta+\varkappa$ gerade und γ gerade ist und ist in diesem Falle das Vierfache des von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ erstreckten Integrals. Demnach ist

$$W_\varkappa^{(m)} = \sum_{\beta,\gamma} 4\,n_\gamma\,(n-\gamma)_\beta\,\sigma^{n-\beta-\gamma}\,\sqrt{\sigma^2-b^2}^{\beta}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}^{\gamma}$$
$$\times\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\beta v\,\sin^\gamma v\,\cos m v\,dv\int_0^{2\pi}\cos^\beta\chi\,\sin^\gamma\chi\,\cos\varkappa\chi\,d\chi,$$

wo die Summationen sich nur über gerade γ und über mit $\varkappa$ gleichartige β erstreckt. Aus dieser Form folgt sofort, dass, wenn $\varkappa$ und m gleichartig sind, was wir stets voraussetzen, $W_\varkappa^{(m)} = W_m^{(\varkappa)}$ ist. Zugleich erkennt man, dass, wenn $\varkappa$ und m gerade sind, $W_\varkappa^{(m)}$ ganz in σ wird, und dass, wenn $\varkappa$ und m ungerade sind, $W_\varkappa^{(m)}$ gleich $\sqrt{\sigma^2-b^2}$ mal einer ganzen Funktion von σ vom höchstens $(n-1)$ten Grade wird.

In gleicher Weise findet man, indem man beachtet, dass

$$\int_0^{2\pi}\cos^\beta\chi\,\sin^\gamma\chi\,\sin\varkappa\chi\,d\chi$$

nur dann von Null verschieden ist, wenn γ ungerade und $\beta+\varkappa$ ungerade ist und dass es in diesem Falle das Vierfache des von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ erstreckten Integrals ist

$$w_\varkappa^{(m)}(\sigma) = \sum_{\beta,\gamma} 4\,n_\gamma\,(n-\gamma)_\beta\,\sigma^{n-\beta-\gamma}\,\sqrt{\sigma^2-b^2}^{\beta}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}^{\gamma}$$
$$\times\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\beta v\,\sin^\gamma v\,\sin m v\,dv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\beta\chi\,\sin^\gamma\chi\,\cos\varkappa\chi\,d\chi$$

wo die Summation nach γ sich über alle ungeraden, nach β über alle mit $\varkappa$ ungleichartigen Zahlen aus der Zahlenreihe 0, 1 . . . n erstreckt. Aus dieser Form erkennt man sofort, dass $w_\varkappa^{(m)} = w_m^{(\varkappa)}$. Zugleich sieht man, dass, wenn $\varkappa$ und m ungerade sind, $w_\varkappa^{(m)}$ gleich $\sqrt{\sigma^2-c^2}$ mal einer

ganzen Funktion höchstens $(n-1)$ten Grades ist, und dass, wenn $\varkappa$ und m gerade sind, $w_\varkappa^{(m)}$ gleich $\sqrt{\sigma^2-b^2}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}$ mal einer ganzen Funktion höchstens $(n-2)$ten Grades ist.

Die in Bezug auf die Form von $W_\varkappa^{(m)}$ und $w_\varkappa^{(m)}$ ermittelten Resultate stehen in Einklang mit unserem Gleichungssystem III, aus welchem wir dieselben ebenfalls hätten ableiten können.

Was nun den Grad der ganzen Funktionen von σ, welche in den W und w vorkommen, anlangt, so behaupten wir, dass, wenn die Differenz zwischen dem oberen und unteren Index $\pm 2\mu$ ist, der Grad jener Funktionen um 2μ hinter dem grösstmöglichen Werth zurückbleibt und dass die Coefficienten der höchsten Potenzen in $W_\varkappa^{(m)}$ und $w_\varkappa^{(m)}$ übereinstimmen, dass also:

$$
\begin{aligned}
&W_\pi^{(\pi+2\mu)} = W_{\pi+2\mu}^{(\pi)} = A_{\pi,\mu}\,\sigma^{n-2\mu} + \ldots\ldots \\
&W_\iota^{(\iota+2\mu)} = W_{\iota+2\mu}^{(\iota)} = \sqrt{\sigma^2-b^2}\,(B_{\iota,\mu}\,\sigma^{n-1-2\mu} + \ldots.) \\
&w_\iota^{(\iota+2\mu)} = w_{\iota+2\mu}^{(\iota)} = \sqrt{\sigma^2-c^2}\,(B_{\iota,\mu}\,\sigma^{n-1-2\mu} + \ldots.) \\
&w_\pi^{(\pi+2\mu)} = w_{\pi+2\mu}^{(\pi)} = \sqrt{\sigma^2-b^2}\,\sqrt{\sigma^2-c^2}\,(A_{\pi,\mu}\,\sigma^{n-2-2\mu} + \ldots.)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Unsere Behauptungen direkt aus den Integralausdrücken für $W_\varkappa^{(m)}$ und $w_\varkappa^{(m)}$ zu beweisen, würde sehr schwierig sein; indessen gelingt uns der Beweis durch den Schluss von n auf $n+1$. Um die W und w für die verschiedenen Werthe von n zu unterscheiden, geben wir denselben noch einen zweiten untern Index n, oder wir schliessen, falls wir eine Summe von mehreren W oder w haben, die zu demselben n gehören, diese Summe in Klammern ein und geben der Klammer den Index n. Ebenso geben wir den A und B, wo es nöthig ist, noch den oberen Index n.

Geht man von der für alle von Null verschiedenen Werthe von $\varkappa$ geltenden Gleichung aus

$$\int B^{n+1}\cos\varkappa\chi\,d\chi = B^{n+1}\frac{\sin\varkappa\chi}{\varkappa} - \frac{n+1}{\varkappa}\int B^n\frac{dB}{d\chi}\sin\varkappa\chi\,d\chi,$$

so findet man durch eine leichte Rechnung:

$$
\begin{aligned}
37)\quad W_{\varkappa,n+1}^{(m)} = {}& \frac{n+1}{4\varkappa}\sqrt{\sigma^2-b^2}\left[W_{\varkappa-1}^{(m-1)} + W_{\varkappa-1}^{(m+1)} - W_{\varkappa+1}^{(m-1)} - W_{\varkappa+1}^{(m+1)}\right]_n \\
&+ \frac{n+1}{4\varkappa}\sqrt{\sigma^2-c^2}\left[w_{\varkappa-1}^{(m-1)} - w_{\varkappa-1}^{(m+1)} + w_{\varkappa+1}^{(m-1)} - w_{\varkappa+1}^{(m+1)}\right]_n
\end{aligned}
$$

Vertauschen wir rechter Hand m und $\varkappa$, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
38)\quad W_{\varkappa,n+1}^{(m)} = {}& \frac{n+1}{4m}\sqrt{\sigma^2-b^2}\left[W_{\varkappa-1}^{(m-1)} + W_{\varkappa+1}^{(m-1)} - W_{\varkappa-1}^{(m+1)} - W_{\varkappa+1}^{(m+1)}\right]_n \\
&+ \frac{n+1}{4m}\sqrt{\sigma^2-c^2}\left[w_{\varkappa-1}^{(m-1)} - w_{\varkappa+1}^{(m-1)} + w_{\varkappa-1}^{(m+1)} - w_{\varkappa+1}^{(m+1)}\right]_n
\end{aligned}
$$

Die erste Gleichung gilt nicht, wenn $\varkappa = 0$, die zweite nicht, wenn $m = 0$; die rechten Seiten nehmen dann die Form $\frac{0}{0}$ an. Setzen wir in der letzten Gleichung $\varkappa = 0$, so kommt:

39) $$W^{(m)}_{0,\,n+1} = \frac{n+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 - b^2}\,\left(W_1^{(m-1)} - W_1^{(m+1)}\right)_n - \frac{n+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\left(w_1^{(m-1)} + w_1^{(m+1)}\right)_n$$

Nur in dem Falle $\varkappa = 0$ und $m = 0$ lassen uns beide Gleichungen im Stich. Wir werden nachher eine andere Reduktionsformel ableiten, die auch für $W_0^{(0)}$ gilt.

Multipliciren wir Gleichung 37) mit $\varkappa$, Gleichung 38) mit m und addiren, so erhalten wir:

40) $$W^{(m)}_{\varkappa,\,n+1} = \frac{n+1}{2(\varkappa+m)}\left\{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\,\left(W^{(m-1)}_{\varkappa-1} - W^{m+1)}_{\varkappa+1}\right)_n + \sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\left(w^{(m-1)}_{\varkappa-1} - w^{(m+1)}_{\varkappa+1}\right)_n\right\}.$$

Diese Gleichung gilt nur in dem Falle nicht, dass $\varkappa$ und m gleichzeitig Null sind. Für $\varkappa = 0$ geht sie in die vorige über.

In ganz entsprechender Weise gewinnt man zwei Recursionsformel für $w^{(m)}_{\varkappa,\,n+1}$, welche aus 37) und 38) entstehen, indem man überall W mit w vertauscht, und erhält aus ihnen dann die mit 40) correspondirende Gleichung:

41) $$w^{(m)}_{\varkappa,\,n+1} = \frac{n+1}{2(\varkappa+m)}\left\{\sqrt{\sigma^2 - b^2}\,\left(w^{(m-1)}_{\varkappa-1} - w^{(m+1)}_{\varkappa+1}\right)_n + \sqrt{\sigma^2 - c^2}\,\left(W^{(m-1)}_{\varkappa-1} - W^{(m+1)}_{\varkappa+1}\right)_n\right\}$$

Aus diesen beiden Gleichungen würde man, selbst wenn über die W und w nichts weiter als bekannt angenommen wird, als was vorher über ihre allgemeine Form gesagt und bewiesen worden ist, folgern können, dass $W^{(m)}_{\varkappa,\,n+1}$ und $w^{(m)}_{\varkappa,\,n+1}$ jedenfalls denselben Coefficienten in den Gliedern der höchsten Potenz von σ haben und dass beide von gleichem Grade in Bezug auf σ, $\sqrt{\sigma^2 - b^2}$, $\sqrt{\sigma^2 - c^2}$ sind, selbst wenn beides für die $W^{(m)}_{\varkappa,\,n}$ und $w^{(m)}_{\varkappa,\,n}$ nicht der Fall wäre.

Nehmen wir nun aber an, dass für ein gewisses n die sämmtlichen W und w die in den Gleichungen 36) supponirte Form haben, so zeigt uns Gleichung 40), dass auch $W^{(m)}_{\varkappa,\,n+1}$, falls nicht $\varkappa = 0$, und Gleichung 41), dass auch $w^{(m)}_{\varkappa,\,n+1}$ die entsprechende Form haben, und man findet:

42)
$$A^{(n+1)}_{\pi,\,\mu} = \frac{n+1}{2(\pi+\mu)}\left(B^{(n)}_{\pi-1,\,\mu} - B^{(n)}_{\pi+1,\,\mu}\right),\ \pi > 0$$
$$B^{(n+1)}_{\iota,\,\mu} = \frac{n+1}{2(\iota+\mu)}\left(A^{(n)}_{\iota-1,\,\mu} - A^{(n)}_{\iota+1,\,\mu}\right)$$

wo im Falle $\iota = 1$ das erste Glied in der Parenthese mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu versehen ist.

Aus Gleichung 40) würde man zwar auch für $\varkappa = 0$ schliessen können, dass $W^{(m)}_{0,\,n+1}$ vom $(n+1-m)$ten Grade ist, aber es würde nicht möglich sein, $A^{(n+1)}_{0,\,\mu}$ allein durch die $B^{(n)}$ auszudrücken, sondern es würden noch die zweiten Coefficienten von $W^{(m-1)}_1$ in Frage kommen, und für den Fall, dass auch $m = 0$, würde uns die Gleichung gänzlich im Stich lassen. Wir leiten daher für $W^{(m)}_{0,\,n+1}$ eine andere Recursionsformel ab.

Setzen wir $B^{n+1}\cos\varkappa\chi = B^n(B\cos\varkappa\chi)$ und drücken in $B\cos\varkappa\chi$ die Produkte $\cos\chi\cos\varkappa\chi$ und $\sin\chi\cos\varkappa\chi$ durch die Summen zweier Cosinusse oder Sinusse aus, so erhalten mit Leichtigkeit die Recursionsformel:

43)
$$W^{(m)}_{\varkappa,\,n+1} = \sigma W^{(m)}_{\varkappa,\,n} + \frac{1}{4}\sqrt{\sigma^2-b^2}\left[W^{(m+1)}_{\varkappa+1} + W^{(m-1)}_{\varkappa+1} + W^{(m+1)}_{\varkappa-1} + W^{(m-1)}_{\varkappa-1}\right]_n$$
$$+ \frac{1}{4}\sqrt{\sigma^2-c^2}\left[w^{(m+1)}_{\varkappa+1} - w^{(m-1)}_{\varkappa+1} - w^{(m+1)}_{\varkappa-1} + w^{(m-1)}_{\varkappa-1}\right]_n$$

Wir übergehen die beiden Recursionsformeln, welche man durch Elimination von $W^{(m-1)}_{\varkappa+1}$ aus 43) und 37) oder aus 43) und 38) erhält, aus deren jeder man dieselben Schlüsse wie aus Gleichung 40) ziehen könnte, ebenso die entsprechenden Recursionsformeln für die w, aus denen man dieselben Schlüsse wie aus 41) ziehen könnte, sondern leiten sofort die noch fehlende Gleichung für $W^{(m)}_{0,\,n+1}$ ab. Setzt man in 43) $\varkappa = 0$, so erhält man

$$W^{(m)}_{0,\,n+1} = \sigma W^{(m)}_{0,\,n} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2-b^2}\left(W^{(m+1)}_1 + W^{(m-1)}_1\right)_n$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2-c^2}\left(w^{(m+1)}_1 - w^{(m-1)}_1\right)_n$$

und indem man aus dieser Gleichung W^{m-1}_1 vermittelst 39) eliminirt:

44)
$$W^{(m)}_{0,\,n+1} = \frac{n+1}{n+1-m}\left\{\sigma W^{(m)}_0 + \sqrt{\sigma^2-b^2}\ W^{(m+1)}_1 + \sqrt{\sigma^2-c^2}\ w^{(m+1)}_1\right\}_n$$

welche auch für $m = 0$ gilt. Aus dieser Gleichung folgt sofort, wenn für W_n und w_n die Voraussetzungen der Gleichungen 36) gelten, dass sämmtliche $W^{(m)}_{0,\,n+1}$ vom $(n+1-m)$ten Grade sind, und man erhält zugleich:

45) $$A^{(n+1)}_{0,\,\mu} = \frac{n+1}{n+1-2\mu}\, A^{(n)}_{0,\,\mu} + 2\, B^{(n)}_{1,\,\mu}$$

Stellen wir dieses Resultat mit dem vorigen zusammen, so ist jetzt bewiesen, dass, wenn für ein gewisses n die sämmtlichen W und w die in den Gleichungen 36) angegebene Form haben, auch sämmtliche W_{n+1} und w_{n+1} diese Form haben. Da nun für $n = 0$ die Gleichungen 36) jedenfalls zutreffen, — es existirt dann nur $W^{(0)}_0$, und dieses ist vom nullten Grade — so ist der Beweis allgemein geliefert.

Aus den Gleichungen 42) könnte man zeigen, dass $A^{(n)}_{\pi,\,\mu}$ und $B^{(n)}_{\iota,\,\mu}$ derselben Funktionalgleichung genügen. Von Wichtigkeit sind die Werthe von $A_{\pi,\,0}$ und $B_{\iota,\,0}$, d. h. die Anfangsglieder von $W^{(\varkappa)}_{\varkappa}$ und $w^{(\varkappa)}_{\varkappa}$. Ich behaupte, dass

$$A^{(n)}_{\pi,\,0} = \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{\Pi(2n)}{\Pi(n+\pi)\,\Pi(n-\pi)},\ \pi > 0$$

$$A^{(n)}_{0,\,0} = 2\,\frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{\Pi(2n)}{\Pi(n)\,\Pi(n)}$$

$$B^{(n)}_{\iota,\,0} = \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{\Pi(2n)}{\Pi(n+\iota)\,\Pi(n-\iota)}$$

Eine einfache Rechnung überzeugt uns, dass diese Ausdrücke den Gleichungen 42) und 45) genügen, und es ist also nur noch zu zeigen, dass für $n = \pi > 0$ in der That

$$W^{(\pi)}_{\pi} = \frac{1}{2^{\pi+1}}\,\sigma^{\pi} + \ldots\ldots$$

für $n = \pi = 0$:

$$W^{(0)}_0 = 1$$

und für $n = \iota$

$$W^{(\iota)}_{\iota} = \sqrt{\sigma^2 - b^2}\left(\frac{1}{2^{\iota+1}}\,\sigma^{\iota-1} + \ldots.\right)$$

ist.

Es ist nun für $n = \pi$

$$W^{(\pi)}_{\pi} = \sum_{\beta,\,\gamma} 4\pi_{\gamma}\,(\pi-\gamma)_{\beta}\,\sigma^{\pi-\beta-\gamma}\sqrt{\sigma^2-b^2}^{\beta}\sqrt{\sigma^2-c^2}^{\gamma}\left(\frac{1}{\pi_{\cdot}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\beta} v\,\sin^{\gamma} v\,\cos\pi v\,dv\right)^2$$

wo die Summation sich über gerade γ und gerade β erstreckt. Es ist nun das Integral gleich Null, wenn $\beta + \gamma < \pi$; andererseits darf $\beta + \gamma$ nicht π überschreiten. Es muss also $\beta + \gamma = \pi$, $\beta = \pi - \gamma$ sein, so dass für $n = \pi$

$$W^{(\pi)}_{\pi} = \sum_{\gamma} 4\pi_{\gamma}\,\sqrt{\sigma^2-b^2}^{\pi-\gamma}\sqrt{\sigma^2-c^2}^{\gamma}\left(\frac{1}{\pi_{\cdot}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\pi-\gamma} v\,\sin^{\gamma} v\,\cos\pi v\,dv\right)^2$$

Es ist aber der in Klammern stehende Ausdruck gleich

$$(-1)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^{\pi} v \cos \pi v \, dv = (-1)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{1}{2^{\pi+1}}$$

also:

$$W_{\pi}^{(\pi)} = \frac{1}{2^{2\pi}} \sum_{\gamma} \pi_{\gamma} (\sigma^2 - b^2)^{\frac{\pi-\gamma}{2}} (\sigma^2 - c^2)^{\frac{\gamma}{2}}$$

Der Coefficient von σ^{π} wird also:

$$\frac{1}{2^{2\pi}} \sum_{\gamma} \pi_{\gamma} = \frac{1}{2^{2\pi}} (\pi_0 + \pi_2 + \pi_4 + \ldots) = \frac{1}{2^{\pi+1}}$$

Für $n = 0$ ist

$$W_0^{(0)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{2\pi} d\chi = 1$$

Es ist ferner für $n = \iota$

$$W_{\iota}^{\iota} = \sum_{\beta, \gamma} 4 \iota_{\gamma} (\iota - \gamma)_{\beta} \, \sigma^{\iota-\beta-\gamma} \sqrt{\sigma^2 - b^2}^{\beta} \sqrt{\sigma^2 - c^2}^{\gamma} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta} v \sin^{\gamma} v \cos \iota v \, dv \right)^2,$$

wo die Summation sich über gerade γ und ungerade β erstreckt. Wie oben schliesst man, dass $\beta = \iota - \gamma$ sein muss und erhält:

$$W_{\iota}^{(\iota)} = \frac{1}{2^{2\iota}} \sqrt{\sigma^2 - b^2} \sum_{\gamma} \iota_{\gamma} (\sigma^2 - b^2)^{\frac{\iota-1-\gamma}{2}} (\sigma^2 - c^2)^{\frac{\gamma}{2}}$$

Der Coefficient von $\sigma^{\iota-1}$ in der Summe ist gleich $\sum_{\gamma} \iota_{\gamma} = 2^{\iota-1}$, so dass für $n = \iota$

$$W_{\iota}^{\iota} = \sqrt{\sigma^2 - b^2} \left\{ \frac{1}{2^{\iota+1}} \sigma^{\iota-1} + \ldots . \right\}$$

Wir haben nun also bewiesen: Es ist

$$W_{\pi}^{(\pi)} = A_{\pi}^{(n)} \sigma^n + \ldots .$$

$$W_0^{(0)} = 2 A_0^{(n)} \sigma^n + \ldots .$$

$$W_{\iota}^{(\iota)} = \sqrt{\sigma^2 - b^2} \, (A_{\iota}^{(n)} \sigma^{n-1} + \ldots .)$$

$$w_{\iota}^{(\iota)} = \sqrt{\sigma^2 - c^2} \, (A_{\iota}^{(n)} \sigma^{n-1} + \ldots .)$$

$$w_{\pi}^{(\pi)} = \sqrt{\sigma^2 - b^2} \sqrt{\sigma^2 - c^2} \, (A_{\pi}^{(n)} \sigma^{n-2} + \ldots),$$

wenn

$$A_{\varkappa}^{(n)} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\Pi(2n)}{\Pi(n+\varkappa) \Pi(n-\varkappa)}$$

gesetzt wird. Stimmen die Indices von W oder w nicht überein, so erreicht die ganze Funktion nicht den in der betreffenden Klasse möglichen höchsten Grad — dass derselbe sich um die Differenz der Indices ermässigt, kommt im Folgenden nicht in Betracht.

§ 4. Eigenschaften der U, u. Auflösung des Gleichungssystems III.

Vermittelst des eben gewonnenen Resultats können wir in den Gleichungen 35) beiderseits die Coefficienten der höchsten Potenz von σ aufsuchen. Links wird die höchste Potenz von σ nur in dem Gliede vorkommen, für welches $m = \lambda$ wird, rechts nur in demjenigen, in welchem $m = \varkappa$ wird. Die auf beiden Seiten eventl. auftretenden irrationalen Faktoren sind dieselben, und die Höhe der Potenzen ist die nämliche. Setzen wir die Coefficienten gleich, so erhalten wir die Gleichungen

$$a_\varkappa^{(n)} A_\lambda^{(n)} U_\varkappa^{(\lambda)}(\rho) = a_\lambda^{(n)} A_\varkappa^{(n)} U_\lambda^{(\varkappa)}(\rho)$$

$$a_\varkappa^{(n)} A_\lambda^{(n)} u_\varkappa^{(\lambda)}(\rho) = a_\lambda^{(n)} A_\varkappa^{(n)} u_\lambda^{(\varkappa)}(\rho)$$

oder, da

46) $$a_\varkappa^{(n)} A_\lambda^{(n)} = a_\lambda^{(n)} A_\varkappa^{(n)},$$

$$U_\varkappa^{(\lambda)}(\rho) = U_\lambda^{(\varkappa)}(\rho), \quad u_\varkappa^{(\lambda)}(\rho) = u_\lambda^{(\varkappa)}(\rho)$$

Für die U und u gelten also dieselben Gleichungen wie für die W und w.

Setzt man z. B. für $n = 2$ $U_0^{(2)} = U_2^{(0)}$, nachdem man diese Doppelintegrale vermittelst des von Heine angegebenen Verfahrens (H. II, 143—47) auf einfache elliptische Integrale erster und zweiter Gattung zurückgeführt hat, so kommt man nach einigen leichten Reduktionen zu der Gleichung:

F) $$3q \int_\rho^\infty \frac{ds}{s^4 \sqrt{s^2 - b^2}\sqrt{s^2 - c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho^3} - \int_\rho^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^2 - b^2}\sqrt{s^2 - c^2}} + 2p \int_\rho^\infty \frac{ds}{s^2\sqrt{s^2 - b^2}\sqrt{s^2 - c^2}}$$

Diese Formel ist aber nur ein specieller Fall einer allgemeineren Reduktionsformel. Differentiiren wir

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{(\rho - \alpha)^\nu}\right),$$

entwickeln das Resultat nach Potenzen von $\rho - \alpha$ und setzen

$$\int \frac{d\rho}{(\rho-\alpha)^{\nu}\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}} = V_{\nu},$$

so erhalten wir durch nachherige Integration:

G) $$\nu(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-c^2)V_{\nu+1} = -\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{(\rho-\alpha)^{\nu}} - (2\nu-1)\alpha(2\alpha^2-b^2-c^2)V_{\nu}$$
$$-(\nu-1)(6\alpha^2-b^2-c^2)V_{\nu-1} - (2\nu-3)2\alpha V_{\nu-2}$$
$$-(\nu-2)V_{\nu-3}$$

welche Formel für $\alpha = 0$, $\nu = 3$ und die Grenzen ρ und ∞ in die obige übergeht.

Wir schreiten nun zur Auflösung des Gleichungssystems III. Betrachten wir die erste Gleichung dieses Systems, so kommt links σ^n nur in dem Gliede vor, in welchem $m = p$ ist, und der Coefficient von σ^n ist $A_p U_{\pi}^{(p)}(\rho)$. Rechts enthält jedes einzelne Glied σ^n, da $E_s^{(n)}(\sigma) = c_s^{(n)}\sigma^n + \ldots$.

Demnach haben wir die Gleichung:

47) $$U_{\pi}^{(p)}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\frac{a_p^{(n)}}{A_p^{(n)}}\sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\pi)} g_s^{(p)} c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho)$$

$\frac{a_p^{(n)}}{A_p^{(n)}}$ ist nach Gleichung 46) von p unabhängig; wir wollen daher setzen:

$$\frac{a_p^{(n)}}{A_p^{(n)}} = 4 \cdot \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{1.2\ldots.n} = N$$

und erhalten:

$$U_{\pi}^{(p)}(\rho) = \frac{1}{2\pi} N \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\pi)} g_s^{(p)} c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho)$$

$$U_{\iota}^{(j)}(\rho) = -\frac{1}{2\pi} N \sum_{s=\sigma+1}^{n} g_s^{(\iota)} g_s^{(j)} c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho)$$

IV.

$$u_{\iota}^{(j)}(\rho) = -\frac{1}{2\pi} N \sum_{s=n+1}^{2n-\sigma} g_s^{(\iota)} g_s^{(j)} c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho)$$

$$u_{\pi}^{(p)}(\rho) = \frac{1}{2\pi} N \sum_{s=2n-\sigma+1}^{2n} g_s^{(\pi)} g_s^{(p)} c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho)$$

Die zweite, dritte und vierte Gleichung folgen resp. aus der zweiten, dritten, vierten Gleichung des Systems III, indem man nach Weghebung der beiderseitigen irrationalen Faktoren die höchsten Potenzen von σ vergleicht.

Nachdem wir nun die U und u bestimmt haben, können wir leicht die Gleichungen des Systems III nach den W auflösen. Lösen wir z. B. das System der Gleichungen

$$\sum_m{}' U_\pi^{(m)}(\rho)\, W_\rho^{(m)}(\sigma) = \frac{a_p^{(n)}}{2\pi} \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\pi)}\, g_s^{(p)}\, F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

$$\pi = 0, 2, \ldots . 2\sigma$$

nach den W auf, so erhalten wir:

$$W_p^{(\pi)}(\sigma) = \frac{\left|U_\varkappa^{(\mu)}(\rho)\right|}{\left|U_\varkappa^{(\lambda)}(\rho)\right|} \qquad \begin{pmatrix} \varkappa, \lambda = 0, 2, 4 \ldots . 2\sigma \\ \mu = 0, 2, \ldots . \pi - 2, \alpha, \pi + 2 \ldots . 2\sigma \end{pmatrix}$$

wenn wir für einen Augenblick definiren:

$$U_\varkappa^{(\alpha)} = \frac{a_p^{(n)}}{2\pi} \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\varkappa)}\, g_s^{(p)}\, F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

Im Falle $\pi = 0$ ist links der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen.

Die Determinante des Nenners ist nun, wenn wir

$$G = \left|g_\varkappa^{(\lambda)}\right| \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1 \ldots . \sigma \\ \lambda = 0, 2, 4 \ldots . 2\sigma \end{pmatrix}$$

setzen, gleich

$$\left(\frac{1}{2\pi} N\right)^{\sigma+1} G \cdot \left|g_\varkappa^{(\lambda)}\, c_\varkappa^{(n)}\, F_\varkappa^{(n)}(\rho)\right| \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1 \ldots . \sigma \\ \lambda = 0, 2 \ldots . 2\sigma \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} N\right)^{\sigma+1} G^2\, c_0^{(n)}\, F_0^{(n)}(\rho)\, c_1^{(n)}\, F_1^{(n)}(\rho) \ldots . c_\sigma^{(n)}\, F_\sigma^{(n)}(\rho)$$

Die Determinante des Zählers ist gleich

$$\left(\frac{1}{2\pi} N\right)^{\sigma} \frac{a_p^{(n)}}{2\pi} G \cdot \left|g_\varkappa^{(\mu)}\, c_\varkappa^{(n)}\, F_\varkappa^{(n)}(\rho)\right| \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1 \ldots . \sigma \\ \mu = 0, 2, \ldots . \pi - 2, \alpha, \pi + 2, \ldots . 2\sigma \end{pmatrix},$$

wenn wir definiren:

$$48) \qquad g_\varkappa^{(\alpha)} = g_\varkappa^{(p)}\, E_\varkappa^{(n)}(\sigma)\, \frac{1}{c_\varkappa^{(n)}},$$

und demnach weiter gleich:

$$\left(\frac{1}{2\pi} N\right)^{\sigma+1} A_p^{(n)}\, G \cdot \left|g_\varkappa^{(\lambda)}\right| c_0^{(n)}\, F_0^{(n)}(\rho)\, c_1^{(n)}\, F_1^{(n)}(\rho) \ldots c_\sigma^{(n)}\, F_\sigma^{(n)}(\rho)$$

$$\begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1 \ldots . \sigma \\ \lambda = 0, 2, \ldots . \pi - 2, \alpha, \pi + 2, \ldots . 2\sigma \end{pmatrix}$$

Es wird also:

$$49) \qquad W_p^{(\pi)}(\sigma) = \frac{A_p^{(n)}}{G} \left| g_\varkappa^{(\lambda)} \right|, \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1 \ldots . \sigma \\ \lambda = 0, 2 \ldots . \pi - 2, \alpha, \pi + 2 \ldots . 2\sigma \end{pmatrix}$$

wo $g_\varkappa^{(\alpha)}$ durch Gleichung 48) definirt ist.

Die g verhalten sich zu einander wie die Coefficienten einer orthogonalen Substitution. Da nun die Adjunkte eines Gliedes in der Determinante der letzteren sich zu diesem Gliede selbst verhält wie die Determinante zu Eins, so wird ein ähnlicher Satz für die Adjunkten der Glieder der Determinante G existiren. Man könnte denselben dadurch ableiten, dass man die g durch die g ausdrückt und nun jenen bekannten Satz in Anwendung brächte. Wir wollen denselben jedoch direkt und zwar auf demselben Wege ableiten, wie jener Satz bewiesen wird. Die g genügen dem folgenden System von Gleichungen (S. 21):

$$g_0^{(0)}\, g_0^{(\pi)} + g_1^{(0)}\, g_1^{(\pi)} + \ldots + g_\varkappa^{(0)}\, g_\varkappa^{(\pi)} + \ldots + g_\sigma^{(0)}\, g_\sigma^{(\pi)} = 0$$

$$g_0^{(2)}\, g_0^{(\pi)} + g_1^{(2)}\, g_1^{(\pi)} + \ldots + g_\varkappa^{(2)}\, g_\varkappa^{(\pi)} + \ldots + g_\sigma^{(2)}\, g_\sigma^{(\pi)} = 0$$

. . . . . .

$$g_0^{(\pi)}\, g_0^{(\pi)} + g_1^{(\pi)}\, g_1^{(\pi)} + \ldots + g_\varkappa^{(\pi)}\, g_\varkappa^{(\pi)} + \ldots + g_\sigma^{(\pi)}\, g_\sigma^{(\pi)} = \frac{\pi}{2(2n+1)\, a_\pi^{(n)}}$$

. . . . . .

$$g_0^{(2\sigma)} g_0^{(\pi)} + g_1^{(2\sigma)} g_1^{(\pi)} + \ldots + g_\varkappa^{(2\sigma)} g_\varkappa^{(\pi)} + \ldots + g_\sigma^{(2\sigma)} g_\sigma^{(\pi)} = 0$$

Wenn $\pi = 0$ haben wir statt $a_0^{(n)} \frac{1}{2}\, a_0^{(n)}$ zu setzen. Bezeichnen wir die Adjunkte von $g_\varkappa^{(\pi)}$ in G mit $\gamma_\varkappa^{(\pi)}$ und multipliciren die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit resp. $\gamma_\varkappa^{(0)}$, $\gamma_\varkappa^{(2)} \ldots \gamma_\varkappa^{(\pi)} \ldots \gamma_\varkappa^{(2\sigma)}$, so erhalten wir:

$$G\, g_\varkappa^{(\pi)} = \frac{\pi}{2(2n+1)\, a_\pi^{(n)}}\, \gamma_\varkappa^{(\pi)}$$

oder

$$50) \qquad \gamma_\varkappa^{(\pi)} = \frac{2(2n+1)\, a_\pi^{(n)}}{\pi}\, G\, g_\varkappa^{(\pi)}$$

Für $\pi = 0$ haben wir wieder statt $a_0^{(n)} \frac{1}{2}\, a_0^{(n)}$ zu setzen.

Entwickeln wir demnach in 49) die Determinante, welche sich von G nur durch die Glieder der $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$ten Zeile unterscheidet, nach den Gliedern dieser Zeile, so finden wir:

$$W_p^{(\pi)} = \frac{2(2n+1)}{\pi}\, A_p^{(n)}\, a_\pi^{(n)} \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(p)}\, g_s^{(\pi)}\, \frac{E_s^{(n)}(\sigma)}{c_s^{(n)}}$$

und diese Gleichung gilt auch unverändert für $\pi = 0$, da dem links hinzuzufügenden Faktor $\frac{1}{2}$ ein ebensolcher rechts gegenüberstehen würde. Da $A_p^{(n)} a_\pi^{(n)} = A_\pi^{(n)} a_p^{(n)}$, so ist in der That $W_p^{(\pi)} = W_\pi^{(p)}$.

In ganz gleicher Weise können wir die Gleichungssysteme behandeln, welche aus resp. der zweiten, dritten und vierten Gleichung des Schema III fliessen, und die $W_j^{(\iota)}$, $w_j^{(\iota)}$, $w_p^{(\pi)}$ bestimmen. Man erhält:

V.

$$W_p^{(\pi)}(\sigma) = \frac{2(2n+1)}{\pi} A_p^{(n)} a_\pi^{(n)} \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(p)} g_s^{(\pi)} \frac{E_s^{(n)}(\sigma)}{c_s^{(n)}}$$

$$W_j^{(\iota)}(\sigma) = -\frac{2(2n+1)}{\pi} A_j^{(n)} a_\iota^{(n)} \sum_{s=\sigma+1}^{n} g_s^{(j)} g_s^{(\iota)} \frac{E_s^{(n)}(\sigma)}{c_s^{(n)}}$$

$$w_j^{(\iota)}(\sigma) = -\frac{2(2n+1)}{\pi} A_j^{(n)} a_\iota^{(n)} \sum_{s=n+1}^{2n-\sigma} g_s^{(j)} g_s^{(\iota)} \frac{E_s^{(n)}(\sigma)}{c_s^{(n)}}$$

$$w_p^{(\pi)}(\sigma) = \frac{2(2n+1)}{\pi} A_p^{(n)} a_\pi^{(n)} \sum_{s=2n-\sigma+1}^{2n} g_s^{(p)} g_s^{(\pi)} \frac{E_s^{(n)}(\sigma)}{c_s^{(n)}}$$

Man überzeugt sich sofort, dass diese Ausdrücke mit dem am Ende des vorigen Paragraphen ausgesprochenen Satze in Einklang stehen.

Es ist nun sehr leicht, vermittelst der in den Schemata IV und V gewonnenen Gleichungen auch umgekehrt $c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho)$ als lineare Funktion von $U_\pi^{(0)}, U_\pi^{(2)} \ldots U_\pi^{(2\sigma)}$ oder $\frac{E_s^{(n)}(\sigma)}{c_s^{(n)}}$ als lineare Funktion von $W_\pi^{(0)}$, $W_\pi^{(2)} \ldots W_\pi^{(2\sigma)}$ darzustellen. Wir führen dies nur für einen Fall aus. Aus dem Gleichungssystem:

$$U_\pi^{(p)}(\rho) = \frac{1}{2\pi} N \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\pi)} g_s^{(p)} c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho)$$

$$p = 0, 2, 4 \ldots 2\sigma$$

folgt:

$$\frac{1}{2\pi} N g_s^{(\pi)} c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho) = \frac{1}{G} \cdot \left| g_{\mu}^{(\nu)} \right| \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2 \ldots s-1, \beta, s+1, \ldots \sigma \\ \nu = 0, 2, 4 \ldots 2\sigma \end{pmatrix}$$

wo

$$g_\beta^{(\nu)} = U_\pi^{(\nu)}$$

gesetzt ist. Entwickeln wir die Determinante nach den Elementen der $(s+1)$ten Zeile, so erhalten wir unter Beachtung der Gleichung 50) den Satz: Ist $F_s^{(n)}$ das zu einer der Funktionen K gehörige zweite Integral, so ist:

$$c_s^{(n)} F_s^{(n)}(\rho) = \frac{4(2n+1)}{N g_s^{(\pi)}} \left\{ \frac{1}{2} a_0^{(n)} g_s^{(0)} U_\pi^{(0)}(\rho) + a_2^{(n)} g_s^{(2)} U_\pi^{(2)}(\rho) + \ldots + a_{2\sigma}^{(n)} g_s^{(2\sigma)} U_\pi^{(2\sigma)}(\rho) \right\}$$

für jedes (gerade) π.

§ 5. Verification für $n = 2$. Reduktion der F auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung.

Will man nun z. B. für den Fall $n = 2$, für den wir im § 6 des ersten Abschnitts die g ermittelt haben, die $U_\pi^{(p)}$ nach der ersten Gleichung des Schema IV berechnen und durch Vergleichung der sich ergebenden Ausdrücke mit den durch Reduktion der Doppelintegrale gewonnenen Werthen diese Gleichung verificiren, so wird man gut thun, die Integrale F nicht in ihrer ursprünglichen Form (S. 25 u. 26) anzuwenden, sondern dieselben zuvörderst auf einfache elliptische Integrale erster und zweiter Gattung zu reduciren. Heine giebt zu diesem Zwecke ein Verfahren an (cf. H. I 387), welches übrigens ganz demjenigen nachgebildet ist, vermittelst dessen man überhaupt ein elliptisches Integral auf Integrale der drei Gattungen reducirt. Dieses Verfahren wird man, wenn man die Integrale in denselben Grenzen erhalten will, wie man sie durch Reduktion der Doppelintegrale erhält, mit Vortheil von vornherein in der folgenden Weise modificiren.

Es ist nach Gleichung 9), wenn wir der Kürze wegen die Indices weglassen:

$$F(\rho) = E(\rho)\,\varphi(\rho),$$

wo

$$\varphi(\rho) = (2n+1)\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{(E(\rho))^2\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}$$

Wir nehmen an, E sei eine bestimmte Funktion der Klasse K und bezeichnen mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die sämmtlichen, also auch die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $K(\rho) = 0$. Man erhält dann durch Partialbruchzerlegung:

$$\varphi(\rho) = \sum_\iota \frac{2n+1}{(K'(\alpha_\iota))^2}\left[\int_\xi^{\tilde\omega}\frac{d\xi}{(\rho-\alpha_\iota)^2} + \frac{\alpha_\iota(2\alpha_\iota^2-b^2-c^2)}{(\alpha_\iota^2-b^2)(\alpha_\iota^2-c^2)}\int_\xi^{\tilde\omega}\frac{d\xi}{\rho-\alpha_\iota}\right]$$

Setzen wir in der Transformationsgleichung G) (S. 41) $\nu = 1$, so erhalten wir:

$$(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-c^2)\int\frac{d\xi}{(\rho-\alpha)^2} + \alpha(2\alpha^2-b^2-c^2)\int\frac{d\xi}{\rho-\alpha_\iota}$$

$$= -\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{\rho-\alpha} - \alpha^2\int d\xi + \int\rho^2\,d\xi$$

Diese Transformationsformel können wir nicht unmittelbar anwenden, sondern müssen erst das Integral $\int\rho^2 d\xi$, welches in den Grenzen $\rho = \rho$

und $\rho = \infty$ seine Gültigkeit verlieren würde, wegschaffen. Setzen wir $\alpha = 0$, so kommt

$$b^2 c^2 \int \frac{d\xi}{\rho^2} = -\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho} + \int^2 \rho\, d\xi$$

und, indem wir subtrahiren und alsdann die Integrale zwischen den Grenzen $\rho = \rho$ und $\rho = \infty$ erstrecken:

$$(\alpha^2 - b^2)(\alpha^2 - c^2) \int_{\xi}^{\tilde{\omega}} \frac{d\xi}{(\rho - \alpha)^2} + \alpha (2\alpha^2 - b^2 - c^2) \int_{\xi}^{\tilde{\omega}} \frac{d\xi}{\rho - \alpha}$$

$$= -\alpha + \frac{\alpha \sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho(\rho - \alpha)} - \alpha^2 \int_{\xi}^{\tilde{\omega}} d\xi + b^2 c^2 \int_{\xi}^{\tilde{\omega}} \frac{d\xi}{\rho^2}$$

Beachtet man, dass $K(\rho)$ entweder eine gerade oder eine ungerade Funktion ist, so findet man:

$$\varphi(\rho) = \sum_{\iota} (2n+1) \frac{1}{(\alpha_\iota^2 - b^2)(\alpha_\iota^2 - c^2) K'(\alpha_\iota)^2}$$

$$\times \left[\frac{\alpha_\iota \sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho(\rho - \alpha_\iota)} - \alpha_\iota^2 \int_{\xi}^{\tilde{\omega}} d\xi + b^2 c^2 \int_{\xi}^{\tilde{\omega}} \frac{d\xi}{\rho^2} \right]$$

Setzen wir:

$$(2n+1) \sum_{\iota} \frac{K(\rho) - K(\alpha_\iota)}{\rho - \alpha_\iota} \frac{\alpha_\iota}{(\alpha_\iota^2 - b^2)(\alpha_\iota^2 - c^2)(K'(\alpha_\iota))^2} = H(\rho),$$

so ist $H(\rho)$ eine ganze Funktion $(n-2)$ten Grades. Bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Constanten:

$$(2n+1) \sum_{\iota} \frac{\alpha_\iota^2}{(\alpha_\iota^2 - b^2)(\alpha_\iota^2 - c^2)(K'(\alpha_\iota))^2} = \mathfrak{a}$$

$$(2n+1) \sum_{\iota} \frac{1}{(\alpha_\iota^2 - b^2)(\alpha_\iota^2 - c^2)(K'(\alpha_\iota))^2} = \mathfrak{b}$$

so ergiebt sich die Gleichung:

$$F(\rho) = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho} H(\rho) - K(\rho) \int_{\xi}^{\tilde{\omega}} \left(\mathfrak{a} - b^2 c^2 \frac{\mathfrak{b}}{\rho^2} \right) d\xi$$

Indem man diese Formel auf $F_0^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ anwendet, findet man:

$$c_0^{(2)} F_0^{(2)}(\rho) = \frac{5}{2}\left\{\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{\rho}\frac{1}{(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-c^2)}\right.$$

$$-\frac{\rho^2-\alpha^2}{(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-b^2)}\int_\rho^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^2-b^2}\sqrt{s^2-c^2}}$$

$$\left.+q\,\frac{\rho^2-\alpha^2}{\alpha^2(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-c^2)}\int_\rho^\infty \frac{ds}{s^2\sqrt{s^2-b^2}\sqrt{s^2-c^2}}\right\}$$

Der entsprechende Ausdruck für $c_1^{(2)} F_1^{(2)}(\rho)$ entsteht, indem man α^2 mit β^2 vertauscht. Dabei sind α^2 und β^2 die durch die Gleichungen 26) definirten Grössen. Setzt man diese Ausdrücke z. B. in die Gleichung

$$U_0^{(0)}(\rho) = \frac{3}{\pi}\left\{\left(g_0^{(0)}\right)^2 c_0^{(2)} F_0^{(2)}(\rho) + \left(g_1^{(0)}\right)^2 c_1^{(2)} F_1^{(2)}(\rho)\right\}$$

ein, so erhält man:

$$U_0^{(0)}(\rho) = \frac{1}{2}\frac{1}{q}\left\{\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{\rho}\right.$$

$$\left.-\rho^2\int_\rho^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^2-b^2}\sqrt{s^2-c^2}} + (2p\rho^2 - q)\int_\rho^\infty \frac{ds}{s^2\sqrt{s^2-b^2}\sqrt{s^2-c^2}}\right\}$$

und vermittelst Gleichung F) (S. 40):

$$U_0^{(0)}(\rho) = \frac{1}{2}\int_\rho^\infty \frac{3\rho^2-s^2}{s^4\sqrt{s^2-b^2}\sqrt{s^2-c^2}}\,ds$$

Genau dasselbe Resultat erhält man durch Reduktion des Doppelintegrals.

Einfacher gestaltet sich die Rechnung für die W. Nach der ersten Gleichung des Schema V wird für $n=2$ beispielsweise

$$W_0^{(0)} = \frac{135}{4\pi}\left\{\left(g_0^{(0)}\right)^2 \frac{K_0^{(2)}(\sigma)}{c_0^{(2)}} + \left(g_1^{(0)}\right)^2 \frac{K_1^{(2)}(\sigma)}{c_1^{(2)}}\right\}$$

$$= \frac{135}{4\pi}\left\{\left(g_0^{(0)}\right)^2(\sigma^2-\alpha^2) + \left(g_1^{(0)}\right)^2(\sigma^2-\beta^2)\right\}$$

$$= \frac{135}{4\pi}\frac{2\pi}{45}\left(\sigma^2 - \frac{p}{6}\right) = \frac{1}{4}(6\sigma^2 - b^2 - c^2)$$

Genau denselben Ausdruck gewinnt man aus dem Doppelintegral (cf. H. II, 143).

§ 6. Allgemeine Auflösung des Gleichungssystems III.

In den vorhergehenden Paragraphen haben wir die Gleichungen des Schema III aufgelöst, indem wir gewisse Eigenschaften der Funktionen W, die aus ihrer Definition durch Doppelintegrale folgten, als bekannt voraussetzten. Man kann nun fragen: In wie weit sind die Gleichungen des Schema III für sich allein für die Funktionen U und W bestimmend? Wir setzen also von den U und W jetzt nur voraus, dass sie jenen Gleichungen genügen sollen, in welcher wir die g und a jetzt auch zwar als gegebene, aber vollkommen willkürliche Grössen ansehen.

Wir haben bereits erwähnt, dass die Gleichungen, welche aus

$$51) \qquad \sum_m{}' U_\pi^{(m)}(\rho)\, W_p^{(m)}(\sigma) - \frac{a_p^{(n)}}{2\pi} \sum_{s=0}^{\sigma} g_s^{(\pi)} g_s^{(p)} F_s^{(n)}(\rho)\, E_s^{(n)}(\sigma)$$

folgen, indem man π, $p = 0,\ 2 \ldots . 2\sigma$ setzt, die U als lineare Funktionen der F, die W als lineare Funktionen der E bestimmen. Setzt man also:

$$52) \qquad \begin{aligned} U_\pi^{(m)}(\sigma) &= \sum_{s=0}^{\sigma} \alpha_{m,s}^{(\pi)} F_s(\rho) \\ W_p^{(m)}(\sigma) &= \sum_{s=0}^{\sigma} \beta_{m,s}^{(p)} E_s(\sigma) \end{aligned}$$

so ist die Frage die: Wie weit werden die Coefficienten α und β durch das erwähnte System von Gleichungen bestimmt?

Man kann nun zunächst leicht zeigen vermittelst der im vorigen Paragraphen durchgeführten Reduktion der F auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung, dass, ebenso wie zwischen den Funktionen E einer und derselben Klasse, auch zwischen den Funktionen F einer und derselben Klasse keine lineare Abhängigkeit besteht. Wir können also sowohl für die $\sigma + 1$ Funktionen E_s wie für die $\sigma + 1$ Funktionen F_s je $\sigma + 1$ Variabeln einführen, die nicht linear von einander abhängig sind. Setzen wir

$$U_\pi^{(m)}(\rho) = x_{\frac{m}{2}}^{(\pi)}, \quad \frac{1}{2} W_p^{(0)}(\sigma) = y_0, \quad W_p^{(m)}(\sigma) = y_{\frac{m}{1}}$$

$$g_s^{(\pi)} F_s^{(n)}(\rho) = \xi_s^{(\pi)}, \quad \frac{a_p^{(n)}}{2\pi} g_s^{(p)} E_s^{(n)}(\sigma) = \eta_s^{(p)}$$

so wird die Gleichung 51)

$$53) \qquad \sum_{\mu=0}^{\sigma} x_\mu^{(\pi)} y_\mu^{(p)} = \sum_{s=0}^{\sigma} \xi_s^{(\pi)} \eta_s^{(p)}$$

und die Gleichungen 52) werden:

54)
$$x_\mu^{(\pi)} = \sum_s c_{\mu,s}^{(\pi)} \xi_s^{(\pi)}$$
$$y_\mu^{(p)} = \sum_s d_{\mu,s}^{(p)} \eta_s^{(p)}$$

wo

$$c_{\mu,s}^{(\pi)} = \frac{\alpha_{m,s}^{(\pi)}}{g_s^{(\pi)}},\quad d_{\mu,s}^{(p)} = \frac{\beta_{m,s}^{(p)}}{\frac{a_p^{(\mu)}}{2\pi} g_s^{(p)}},\quad d_{0,s}^{(p)} = \frac{\frac{1}{2}\beta_{0,s}^{(p)}}{\frac{a_p^{(\mu)}}{2\pi} g_s^{(p)}},\quad \mu = \frac{m}{2}$$

Die Gleichungen, welche aus Gleichung 51) fliessen, stellen uns also die Aufgabe, $(\sigma+1)^2$ bilineare Formen, von denen jede linear in einem der $\sigma+1$ Systeme der x und linear in einem der $\sigma+1$ Systeme der y ist, gleichzeitig in sich selbst zu transformiren.

Die Gleichung 53) definirt, wenn wir uns unter π und p einmal feste Werthe vorstellen, nach einer Bemerkung in einem nachgelassenen Aufsatze Jacobi's*) die $x_\mu^{(\pi)}$ und $\eta_s^{(p)}$ als zwei conjugirte Systeme von Variabelen, indem nämlich, wenn

$$x_\mu^{(\pi)} = \sum_s c_{\mu,s} \xi_s^{(\pi)},$$
$$\eta_s^{(p)} = \sum_\mu c_{\mu,s} y_\mu^{(p)}$$

sein muss. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$y_\mu^{(p)} = \sum_s c'_{s,\mu} \eta_s^{(p)}$$

und demnach:

$$d_{\mu,s} = c'_{s,\mu}$$

indem wir, einer Bezeichnungsweise des Herrn Kronecker folgend, unter $c'_{s,\mu}$ das dem Element $c_{\mu,s}$ entsprechende Element des zum System der c reciproken Systems verstehen, d. h. die Adjunkte von $c_{\mu,s}$ in der Determinante $|c_{\mu,s}|$, dividirt durch diese Determinante.

Haben wir nun für ein bestimmtes π für die $c_{\mu,s}^{(\pi)}$ ein System von $(\sigma+1)^2$ willkürlichen Grössen gewählt, so werden die $d_{\mu,s}^{(p)}$ ihre reciproken, die Werthe von $d_{\mu,s}^{(p)}$ hängen also nicht von p ab, sondern das System der Substitutionscoefficienten ist für alle Gleichungen, welche aus 53) bei demselben π aber den verschiedenen p folgen, ganz dasselbe. Genau ebenso ist zu schliessen, dass das System der Grössen $c_{\mu,s}^{(\pi)}$ für alle Werthe von π dasselbe sein muss. Wir haben also zu setzen:

$$c_{\mu,s}^{(\pi)} = e_{m,s},\ d_{\mu,s}^{(p)} = e'_{s,m},$$

*) Ueber eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variabeln-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks. Ges. Werke, Bd. III, Crelle's Journ., Bd. 53.

wo die $e_{m,s}$ $(\sigma+1)^2$ willkürliche Grössen bezeichnen und die Systeme der $e_{m,s}$ und $e'_{s,m}$ reciprok sind, und erhalten:

$$\alpha^{(\pi)}_{m,s} = g^{(\pi)}_s \, e_{m,s}$$

$$\beta^{(p)}_{m,s} = \frac{a^{(n)}_p}{2\pi} \, g^{(p)}_s \, e'_{s,m}$$

wo für $m = 0$ in der letzten Gleichung linker Hand der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen ist. Eine einfache Rechnung überzeugt uns, dass wir zu den früheren speciellen, in 47) und 49) gegebenen Lösungen zurückgeführt werden, wenn wir setzen:

$$e_{m,s} = \frac{N}{2\pi} \, g^{(m)}_s \, c^{(n)}_s .$$

VITA.

Natus sum Ernestus Vorsteher in urbe Barmen die XIII. mensis Augusti anni h. s. LX patre Guilelmo matre Guilelmina e gente Griessel quam defunctam lugeo. Fidei addictus sum evangelicae. Primis literarum elementis imbutus novem per annos scholam frequentavi, quae tum schola realis primi ordinis vocabatur. Testimonium maturitatis vere anni LXXVIII adeptus gymnasium adii ibique vere anni sequentis examen maturitatis superavi. Deinde cum in universitate Fridericia Guilelma Rhenana per terties sex menses studiis mathematicis et physicis me dedissem, auctumno anni LXXX universitatem Berolinensem adii, cuius civis fui per octo semestria.

Viros audivi illustrissimos

Bonnae: Clausius (†), Delius, Ketteler, Kortum, Kékulé, Lipschitz, J. B. Meyer, v. Richthofen, Schaafhausen, Schaarschmidt, Aymeric, Piumati.

Berolini: du Bois-Reymond, Bruns, Förster, Fuchs, v. Helmholtz, Hofmann, G. Kirchhoff (†), Kummer, Kronecker, v. Martens, Netto, Paulsen, Tietjen, v. Treitschke, Waldeyer, Wangerin, Weierstrass, Zeller.

Seminarii mathematici Bonnae sodalis fui per tres, Berolini per octo semestria. Per bis sex menses in laboratorio physico ill. Helmholtzii exercitationes practicas tractavi.

Omnibus his viris optime de me meritis, imprimis vero ill. Lipschitz, Weierstrass nec non Kronecker gratias ago quam maximas semperque habebo.

THESEN.

I.

Unter den von Weber, Riemann, C. Neumann, v. Helmholtz, Clausius und Anderen aufgestellten elektrodynamischen Grundgesetzen verdient das Clausius'sche den Vorzug.

II.

Es empfiehlt sich, die Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen in besonderen Vorlesungen zu behandeln.

III.

Bei genauerem Studium der Geschichte der Mathematik findet man für alle grossen mathematischen Entdeckungen vorbereitende Resultate in früheren Forschungen.